surge del hecho (véase el problema 7.11) que se asigna cualquier combinación de 1s y 0s a las variables, uno y sólo uno de los productos fundamentales que involucran todas las variables toma el valor 1; todos los demás toman el valor 0. Por lo tanto, de la tabla de verdad se puede obtener, por inspección, la forma completa de suma de productos, y recíprocamente.

EJEMPLO 7.7 La forma completa de suma de productos para la expresión Booleana del Ejemplo 7.6 es

$$\begin{aligned} Y &= A\cdot B\cdot C + A\cdot \bar{B}\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot (C+\bar{C}) \\ &= A\cdot B\cdot C + A\cdot \bar{B}\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot \bar{C} \end{aligned}$$

Cuando $A = 1, B = 1, C = 1$, el primer producto fundamental, $A\cdot B\cdot C$, y junto con él Y, es igual a 1; todos los demás productos fundamentales completos son iguales a 0. Análogamente, $Y = 1$ cuando $A = 1, B = 1$ o $B = 0$, $C = 1$; cuando $A = 0, B = 1, C = 1$; y cuando $A = 0, B = 1, C = 0$. Para todas las demás combinaciones de 1s y de 0s, $Y = 0$. Así tenemos la tabla de verdad

A	1100·····
B	1011·····
C	1110·····
Y	11110000

la cual, excepto por el orden de las columnas, coincide con la tabla de verdad encontrada en el ejemplo 7.6.

Recíprocamente, comenzando con la tabla de verdad, uno va leyendo los productos fundamentales correspondientes a los 1s en la fila Y y de allí obtiene la forma completa de suma de productos de Y.

$ABC + A^{B'}C + {}^{A}BC + A\overset{B}{\bar{C}}$

Problemas resueltos

ALGEBRA DE BOOLE

7.1 Considere el álgebra de Boole D_{70} definida en el ejemplo 7.1(e).

(a) Encuentre el valor de: (1) $A = 35 * (2 + 7')$, (2) $B = (35 * 10) + 14'$, (3) $C = (2 + 7) * (14 * 10)'$.

(b) ¿Cómo están ordenados los elementos D_{70}? Dibuje el diagrama de D_{70}.

(c) Encuentre los átomos de D_{70}.

(a) Calcule cada expresión paso por paso, utilizando las definiciones de $a + b$, $a * b$ y a'.

(1) $7' = 10$, $2 + 10 = 10$; así que, $A = 35 * 10 = 5$.

(2) $35 * 10 = 5$, $14' = 5$; así que, $B = 5 + 5 = 5$.

(3) $2 + 7 = 14$, $14 * 10 = 2$, $2' = 35$; así que, $C = 14 * 35 = 7$.

(b) Observe que $a + b = \text{mcm}(a, b) = b$ si y sólo si b es un múltiplo de a. Así que $2 \precsim 14$, pero 2 y 5 no son comparables. La fig. 7-10 es el diagrama de D_{70}.

(c) Los átomos de D_{70} son los sucesores inmediatos de 1; éstos son 2, 5 y 7 (los primos en D_{70}).

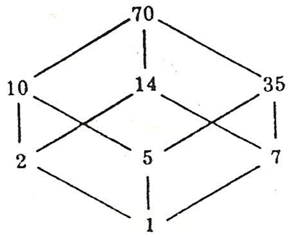


Figura 7-10

7.2 Escriba el dual de cada ecuación de Boole:

(*a*) Para obtener la ecuación dual, intercambie + y $*$, e intercambie 0 y 1. Así que

$$(a+0)+(1*a')=1$$

(*b*) Primero escriba la ecuación usando $*$: $a+(a'*b)=a+b$. Luego el dual es: $a*(a'+b)=a*b$, lo cual se puede escribir como

$$a(a'+b)=ab$$

7.3 Ponga las siguientes expresiones de Boole $E(x, y, z)$ en forma de suma de productos, y luego en forma completa de suma de productos: (*a*) $E_1=x(y'z)'$, (*b*) $E_2=z(x'+y)+y'$.

Use el algoritmo dado en la sec. 7.6.

(*a*) Primero tenemos

$$E_1=x(y'z)'=x(y+z')=xy+xz'$$

y E_1 está en forma de suma de productos. Luego tenemos

$$\begin{aligned}E_1&=xy+xz'=xy(z+z')+x(y+y')z'=xyz+xyz'+xyz'+xy'z'\\&=xyz+xyz'+xy'z'\end{aligned}$$

lo que está en forma completa de suma de productos.

(*b*) Primero tenemos

$$E_2=z(x'+y)+y'=x'z+yz+y'$$

Luego,

$$\begin{aligned}E_2&=x'z+yz+y'=x'z(y+y')+yz(x+x')+y'(x+x')(z+z')\\&=x'yz+x'y'z+xyz+x'yz+xy'z+xy'z'+x'y'z+x'y'z'\\&=xyz+xy'z+xy'z'+x'yz+x'y'z+x'y'z'\end{aligned}$$

7.4 Exprese $E(x, y, z)=(x'+y)'+x'y$ en forma completa de suma de productos.

Tenemos $E=(x'+y)'+x'y=xy'+x'y$, lo que sería la forma completa de suma de productos de E si E fuera una expresión de Boole en x e y. Sin embargo, está especificado que E es una expresión de Boole en las tres variables x, y, y z. Así que,

$$E=xy'+x'y=xy'(z+z')+x'y(z+z')=xy'z+xy'z'+x'yz+x'yz'$$

es la forma completa de suma de productos para E.

7.5 Sea $E=xy'+xyz'+x'yz'$. Demuestre que (*a*) $xz'+E=E$, (*b*) $x+E\neq E$, (*c*) $z'+E\neq E$.

Como la forma completa de suma de productos es única (teorema 7.7), $A+E=E$, en donde $A\neq 0$, si y sólo si los sumandos de la forma completa de suma de productos para A están entre los sumandos de la forma completa de la suma de productos para E. Así, primero encuentre la forma completa de suma de productos para E:

$$E=xy'(z+z')+xyz'+x'yz'=xy'z+xy'z'+xyz'+x'yz'$$

(*a*) Exprese xz' en forma completa de suma de productos:

$$xz'=xz'(y+y')=xyz'+xy'z'$$

como los sumandos de xz' están entre los de E, tenemos $xz'+E=E$.

(*b*) Exprese x en forma completa de suma de productos:

$$x=x(y+y')(z+z')=xyz+xyz'+xy'z+xy'z'$$

el sumando xyz de x no es un sumando de E; así que $x + E \neq E$.

(*c*) Exprese z' en forma completa de suma de productos:

$$z' = z'(x + x')(y + y') = xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$$

El sumando $x'y'z'$ de z' no es un sumando de E; así que $z' + E \neq E$.

7.6 Considere el diagrama de Venn de los conjuntos A, B, y C dados en la fig. 7-11. Observe que el conjunto universal U (el rectángulo) está particionado en $2^3 = 8$ conjuntos, los cuales están rotulados (1) a (8). (*a*) Exprese cada uno de los conjuntos en términos de A, B, y C. (*b*) En el álgebra de Boole $\mathscr{P}(U)$, sea $E(A, B, C)$ cualquier expresión de Boole que use las letras A, B y C. Dé una interpretación geométrica de la forma completa de suma de productos de E.

(*a*) Usando la notación de Boole AB en lugar de $A \cap B$ y A' en lugar de A^c, cada uno de los ocho conjuntos es un producto fundamental que usa A, B, y C:

$$(1) = AB'C' \qquad (3) = A'BC' \qquad (5) = ABC \qquad (7) = A'B'C$$
$$(2) = ABC' \qquad (4) = AB'C \qquad (6) = A'BC \qquad (8) = A'B'C'$$

(*b*) La expresión de Boole E se representa por la unión de una o más de las áreas (1) a (8) en la fig. 7.11. La unión (suma) es única, y da la forma completa de suma de productos de E.

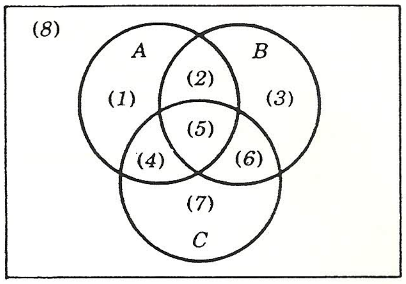


Figura 7-11

CIRCUITOS LOGICOS

7.7 Considere las siguientes tres parejas de sucesiones de bits:

(i)	110001	(ii)	10001111	(iii)	101100111000
	101101		00111100		000111001101

¿Cómo se procesaría cada par de sucesiones por (*a*) una compuerta OR? (*b*) una compuerta AND?

(*a*) Recuerde que ocurre un 0 como una salida de una compuerta OR sólo si ambas entradas son 0. En (i), esto ocurre solamente en la posición 5; en (ii), solamente en la posición 2; en (iii), solamente en las posiciones 2 y 11. Así que las salidas son

(i) 111101 (ii) 10111111 (iii) 101111111101

(*b*) Recuerde que ocurre un 1 como una salida de una compuerta AND solamente cuando ambas entradas son 1. En (i), esto ocurre solamente en las posiciones primera y última; en (ii), solamente en las posiciones 5 y 6; en (iii), solamente en las posiciones 4 y 9. Así que las salidas son

(i) 100001 (ii) 00001100 (iii) 000100001000

7.8 ¿Cómo procesaría una compuerta NOT cada sucesión?

(i) 110001 (ii) 10001111 (iii) 101100111000

Una compuerta NOT cambia 0 a 1 y 1 a 0. Así que las salidas son

(i) 001110 (ii) 01110000 (iii) 010011000111

7.9 Dado

$$A = 1100110110$$
$$B = 1110000111$$
$$C = 1010010110$$

Encuentre (*a*) $A + B + C$, (*b*) $A \cdot B \cdot C$, (*c*) $C(\bar{A} + B)$, (*d*) $A(\overline{B + C})$.

(*a*) Un 0 ocurre en una suma representando una compuerta OR, solamente en donde todas las entradas son 0s. Observe que hay tres 0s solamente en las posiciones 4 y 7. Así que

$$A + B + C = 1110110111$$

(*b*) Un 1 ocurre en un producto, representando una compuerta AND, solamente cuando todas las entradas son 1s. Esto sucede solamente en las posiciones 1, 8 y 9. Así que

$$A \cdot B \cdot C = 1000000110$$

(*c*) Calcule paso por paso:

$$\bar{A} = 0011001001$$
$$\bar{A} + B = 1111001111$$
$$C(\bar{A} + B) = 1010000110$$

(*d*) Calcule paso por paso:

$$B + C = 1110010111$$
$$\overline{B + C} = 0001101000$$
$$A(\overline{B + C}) = 0000100000$$

7.10 Dadas cinco entradas A, B, C, D y E, encuentre las sucesiones especiales que dan todas las diferentes combinaciones posibles de bits de entrada.

Cada sucesión tendrá $2^5 = 32$ bits. Un esquema de asignación es el siguiente:

(i) Supongamos que a A se le asignan $2^4 = 16$ bits que sean 0s, seguidos por $2^4 = 16$ bits que sean 1s.
(ii) Supongamos que a B se le asignan $2^3 = 8$ bits que sean 0s, seguidos por $2^3 = 8$ bits que sean 1s; y luego repita una vez.
(iii) Supongamos que a C se le asignan $2^2 = 4$ bits que sean 0s, seguidos por $2^2 = 4$ que sean 1s; y luego repita tres veces.
(iv) Supongamos que a D se le asignan $2^1 = 2$ bits que sean 0s, seguidos por $2^1 = 2$ bits que sean 1s; luego repita siete veces.
(v) Supongamos que a E se le asigna $2^0 = 1$ bit que sea 0, seguido por $2^0 = 1$ bit que sea 1; y luego repita quince veces.

Las sucesiones especiales que resultan son

$$A = 00000000000000001111111111111111$$
$$B = 00000000111111110000000011111111$$
$$C = 00001111000011110000111100001111$$
$$D = 00110011001100110011001100110011$$
$$E = 01010101010101010101010101010101$$

(Observando que las columnas del arreglo de arriba son, de izquierda a derecha, los primeros 32 enteros binarios en orden ascendente, tenemos otro esquema de asignaciones tal vez más simple.)

7.11 Dadas tres entradas A, B, y C, encuentre las tablas de verdad de los primeros ocho productos fundamentales:

$$A \cdot B \cdot C \qquad A \cdot B \cdot \bar{C} \qquad A \cdot \bar{B} \cdot C \qquad A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

$$\bar{A} \cdot B \cdot C \qquad \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \qquad \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \qquad \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

Observe primero que las sucesiones especiales para A, B, y C contienen cada uno $2^3 = 8$ bits. Tenemos:

$$\begin{aligned} A &= 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ B &= 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ C &= 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \end{aligned}$$

Luego

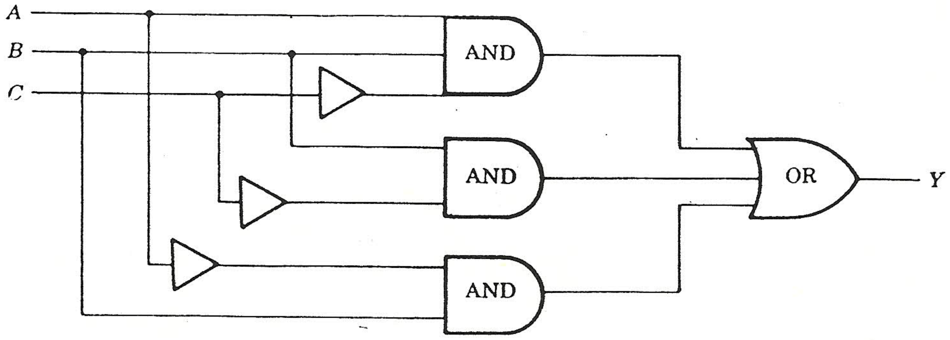
$$\begin{aligned} \bar{A} &= 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \bar{B} &= 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ \bar{C} &= 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \end{aligned}$$

y

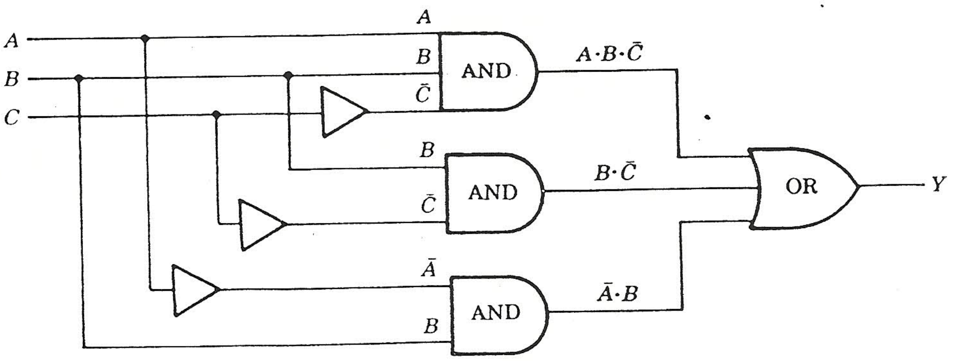
$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot C &= 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ A \cdot B \cdot \bar{C} &= 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ A \cdot \bar{B} \cdot C &= 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} &= 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \bar{A} \cdot B \cdot C &= 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} &= 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C &= 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0'\ 0 \\ \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} &= 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{aligned}$$

Se ve que para cada combinación de entrada, exactamente uno de los ocho productos fundamentales asume el valor de 1. Así que, para $A = 0, B = 1, C = 1$ (o sea $\bar{A} = B = C = 1$), solamente el producto $\bar{A} \cdot B \cdot C$ es igual a 1. Además, un producto dado toma el valor 1 para solamente una combinación de entradas; es decir, su tabla de verdad tiene 1 en exactamente una posición y 0s en las demás.

7.12 Encuentre una expresión de Boole y la tabla de verdad para el circuito lógico de la fig. 7.12(a).



(a)



(b)

Figura 7-12

Observe primero que el circuito tiene un patrón AND-OR. Rotule las entradas y la salida de cada compuerta AND como en la fig. 7-12(b). Luego la salida Y del circuito es la suma de las salidas de las compuertas AND.

$$Y = AB\bar{C} + B\bar{C} + \bar{A}B$$

Método 1.

Como hay tres entradas, la tabla de verdad del circuito constará de sucesiones de 8 bits. Calculamos de la siguiente manera:

$$A = 00001111$$
$$B = 00110011$$
$$C = 01010101$$
$$\bar{A} = 11110000$$
$$\bar{C} = 10101010$$
$$AB\bar{C} = 00000010$$
$$B\bar{C} = 00100010$$
$$\bar{A}B = 00110000$$
$$Y = 00110010$$

Es decir, la tabla de verdad del circuito es

A	0 0 0 0 1 1 1 1
B	0 0 1 1 0 0 1 1
C	0 1 0 1 0 1 0 1
Y	0 0 1 1 0 0 1 0

A'BC' + A'BC + ABC'

A'B + ABC' + BC'

Método 2.

La forma completa de suma de productos para Y es

$$\begin{aligned} Y &= AB\bar{C} + B\bar{C}(A + \bar{A}) + \bar{A}B(C + \bar{C}) \\ &= AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC \end{aligned}$$

de la cual, por inspección, la tabla de verdad es

A	100·······
B	111·······
C	001·······
Y	11100000

$AB\bar{C}' + A'BC' + A'BC$

7.13 Definimos dos compuertas nuevas. Una *compuerta NAND* es equivalente a una compuerta AND seguida por una compuerta NOT, y una *compuerta NOR* es equivalente a una compuerta OR seguida por una compuerta NOT. (Véase la fig. 7-13.) Dadas dos entradas, A, B, encuentre la tabla de verdad para (a) la compuerta NAND, (b) la compuerta NOR.

(a) La salida de la compuerta NAND es $Y = \overline{A \cdot B}$. Calcule la tabla de verdad de la siguiente manera:

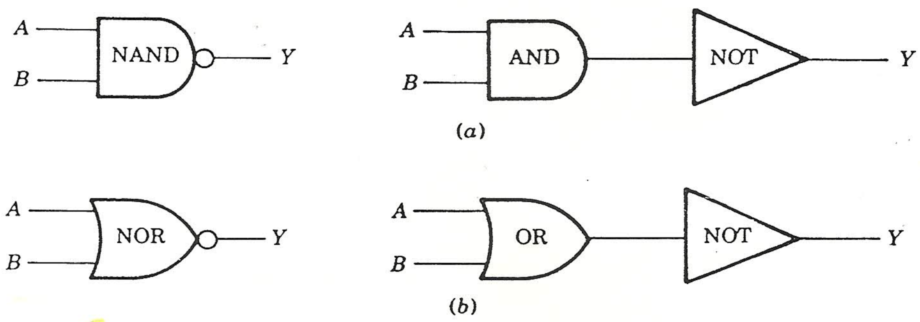


Figura 7-13

$$A = 0011$$
$$B = 0101$$
$$A \cdot B = 0001$$
$$Y = 1110$$

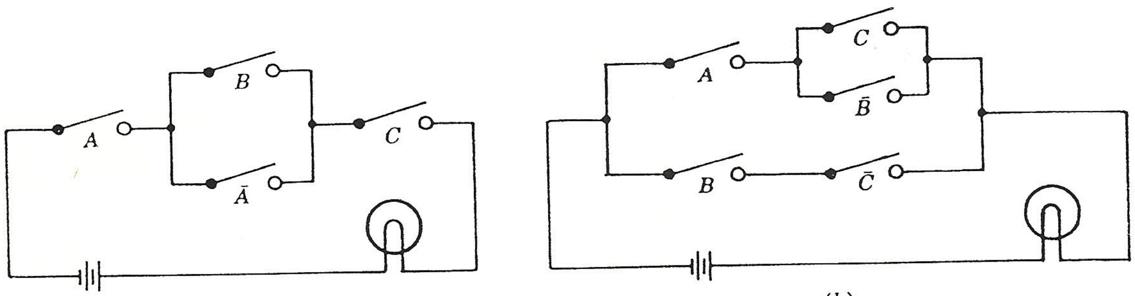
(b) La salida de la compuerta NOR es $Y = \overline{A + B}$. Calcule su tabla de verdad como sigue:

$$A = 0011$$
$$B = 0101$$
$$A + B = 0111$$
$$Y = 1000$$

7.14 Determine una expresión de Boole para cada circuito de interruptores en la fig. 7-14.

Recuerde que usamos una suma para un circuito en paralelo y un producto para un circuito en serie. Así:

(a) $A \cdot (B + \bar{A}) \cdot C$ (b) $A \cdot (C + \bar{B}) + B \cdot \bar{C}$



(a) (b)

Figura 7-14

DEMOSTRACION DE TEOREMAS

7.15 Demuestre el teorema 7.2:

(i) Leyes de idempotencia:

(5a) $a + a = a$ (5b) $a * a = a$

(ii) Leyes de acotamiento:

(6a) $a + 1 = 1$ (6b) $a * 0 = 0$

(iii) Leyes de absorción:

(7a) $a + (a * b) = a$ (7b) $a * (a + b) = a$

(iv) Leyes asociativas:

(8a) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (8b) $(a * b) * c = a * (b * c)$

(5b) $a = a * 1 = a * (a + a') = (a * a) + (a * a') = (a * a) + 0 = a * a$

(5a) Se obtiene a partir de (5b) y de la dualidad.

(6b) $a * 0 = (a * 0) + 0 = (a * 0) + (a * a') = a * (0 + a') = a * (a' + 0) = a * a' = 0$

(6a) Se obtiene a partir de (6b) y de la dualidad.

(7b) $a * (a + b) = (a + 0) * (a + b) = a + (0 * b) = a + (b * 0) = a + 0 = a$, en donde se usó la ley de acotamiento en el penúltimo paso.

(7a) Se obtiene a partir de (7b) y de la dualidad.

(8b) Sea $L = (a * b) * c$ y $R = a * (b * c)$. Tenemos que demostrar que $L = R$. Primero demostramos que $a + L = a + R$. Usando las leyes de absorción en los últimos dos pasos,

$$a + L = a + ((a * b) * c) = (a + (a * b)) * (a + c) = a * (a + c) = a$$

También, usando la ley de absorción en el último paso y la ley de idempotencia en el penúltimo paso,

$$a + R = a + (a * (b * c)) = (a + a) * (a + (b * c)) = a * (a + (b * c)) = a$$

Así, $a + L = a + R$. Luego demostramos que $a' + L = a' + R$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} a' + L &= a' + ((a * b) * c) \\ &= (a' + (a * b)) * (a' + c) \\ &= ((a' + a) * (a' + b)) * (a' + c) \\ &= (1 * (a' + b)) * (a' + c) \\ &= (a' + b) * (a' + c) \\ &= a' + (b * c) \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} a' + R &= a' + (a * (b * c)) \\ &= (a' + a) * (a' + (b * c)) \\ &= 1 * (a' + (b * c)) \\ &= a' + (b * c) \end{aligned}$$

De donde, $a' + L = a' + R$. En consecuencia,

$$L = L + 0 = L + (a * a') = (L + a) * (L + a') = (a + L) * (a' + L) = (a + R) * (a' + R) = R$$

(8a) Se obtiene a partir de (8b) y de la dualidad.

7.16 Demuestre el teorema 7.3:

(i) (Unicidad del complemento) Si $a + x = 1$ y $a * x = 0$, entonces $x = a'$.

(ii) (Ley de involución) $(a')' = a$.

(iii) (9a) $0' = 1$ (9b) $1' = 0$

(i) Tenemos que:

$$\begin{aligned} a' &= a' + 0 = a' + (a * x) = (a' + a) * (a' + x) \\ &= 1 * (a' + x) = a' + x \end{aligned}$$

También,

$$x = x + 0 = x + (a * a') = (x + a) * (x + a') = 1 * (x + a') = x + a'$$

Así que

$$x = x + a' = a' + x = a'$$

(ii) Por definición de complemento, $a + a' = 1$ y $a * a' = 0$. Por conmutatividad, $a' + a = 1$ y $a' * a = 0$. Por unicidad del complemento, a es el complemento de a', o sea, $a = (a')'$.

(iii) Por la ley de acotamiento (6a), $0 + 1 = 1$, y por el axioma de identidad (3b). $0 * 1 = 0$. Por la unicidad del complemento, 1 es el complemento de 0, es decir, $1 = 0'$. Por la dualidad, $0 = 1'$.

7.17 Demuestre el teorema 7.4 (Leyes de DeMorgan):

(10a) $(a + b)' = a' * b'$ (10b) $(a * b)' = a' + b'$

(10a) Tenemos que mostrar que $(a + b) + (a' * b') = 1$ y $(a + b) * (a' * b') = 0$; luego por la unicidad del complemento, $a' * b' = (a + b,)'$. Tenemos:

$$\begin{aligned} (a + b) + (a' * b') &= b + a + (a' * b') = b + (a + a') * (a + b') \\ &= b + 1 * (a + b') = b + a + b' = b + b' + a = 1 + a = 1 \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} (a + b) * (a' * b') &= ((a + b) * a') * b' \\ &= ((a * a') + (b * a')) * b' = (0 + (b * a')) * b' \\ &= (b * a') * b' = (b * b') * a' = 0 * a' = 0 \end{aligned}$$

Así $a' * b' = (a + b)'$.

(10b) El principio de la dualidad (teorema 7.1).