Problemas resueltos

SUMAS MINIMALES

8.1 Encuentre E_L, el número de literales y E_S, el número de sumandos, para cada expresión de Boole E:

(*a*) $E = xy'z + x'z' + yz' + x$ (*c*) $E = xyt' + x'y'zt + xz't$

(*b*) $E = x'y'z + xyz + y + yz' + x'z$ (*d*) $E = (xy' + z)' + xy'$

Sencillamente, sume el número de literales, distinguiendo entre las formas complementadas y no complementadas, y el número de sumandos en cada expresión:

(*a*) $E_L = 3 + 2 + 2 + 1 = 8$ $E_S = 4$

(*b*) $E_L = 3 + 3 + 1 + 2 + 2 = 11$ $E_S = 5$

(*c*) $E_L = 3 + 4 + 3 = 10$ $E_S = 3$

(*d*) Debido a que no se escribe E como una suma de productos, E_L y E_S no están definidas.

8.2 Dado que E y F está cada uno en una forma de suma de productos y son expresiones de Boole equivalentes, defina: (*a*) E es más simple que F, (*b*) es minimal.

(*a*) E es más simple que F si $E_L < F_L$ y $E_S < F_S$, o si $E_L < F_L$ y $E_S < F_S$.

(*b*) E es minimal si no hay ninguna expresión de suma de productos equivalente que sea más simple que E.

8.3 Sean F_1 y F_2 productos fundamentales, tales que exactamente una variable, por ejemplo x_k, aparezca complementada en sólo uno de P_1 y P_2 y no complementada en el otro. El *consenso* de P_1 y P_2 es, entonces, el producto (sin repetición) de los literales de P_1 y los literales de P_2 después de que x_k y x'_k sean suprimidas. (No definimos un consenso de $P_1 = x$ y $P_2 = x'$.) (*a*) Encuentre el consenso de:

(1) $xyz's$ y $xy't$ (3) $x'yz$ y $x'yt$

(2) xy' y y (4) $x'yz$ y xyz'

(*b*) Demuestre que si Q es el consenso de P_1 y P_2,

(*a*) (1) $xz'st$

(2) x

(3) No tienen ningún consenso ya que ninguna variable aparece no complementada en uno de los productos y complementada en el otro.

(4) No tienen ningún consenso, ya que tanto x como z aparecen complementadas en uno de los productos y no complementadas en el otro.

(*b*) Como los literales conmutan, podemos suponer sin perder generalidad que

$$P_1 = a_1a_2 \cdots a_rt \qquad P_2 = b_1b_2 \cdots b_st' \qquad Q = a_1a_2 \cdots a_rb_1b_2 \cdots b_s$$

Ahora, $Q = Q(t + t') = Qt + Qt'$. Debido a que Qt contiene a P_1, $P_1 + Qt = P_1$; y porque Qt' contiene a P_2, $P_2 + Qt' = P_2$. Así

$$P_1 + P_2 + Q = P_1 + P_2 + Qt + Qt' = (P_1 + Qt) + (P_2 + Qt') = P_1 + P_2$$

8.4 Considere una expresión de Boole $E = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$, en donde las Ps son productos fundamentales. Se llamará *método de consenso* a la aplicación de los dos pasos siguientes a E:

Paso (1): Suprima cualquier producto fundamental P_i que incluya cualquier otro producto fundamental P_j. (Permisible por la ley de absorción.)

Paso (2): Sume el consenso Q de P_i y P_j cualesquiera, siempre y cuando Q no incluya ninguno de las Ps. [Permisible por el problema 8.3(*b*).]

Un teorema fundamental en el álgebra de Boole dice que el método de consenso, aplicado a cualquier E suma de Boole de productos, parará eventualmente, y luego E será la suma de todos sus implicantes primos. Aplique el método de consenso a

$$E = xyz + x'z' + xyz' + x'y'z + x'yz'$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
E &= xyz + x'z' + xyz' + x'y'z && (x'yz' \text{ incluye a } x'z')\\
&= xyz + x'z' + xyz' + x'y'z + xy && (\text{Consenso de } xyz \text{ y } xyz')\\
&= x'z' + x'y'z + xy && (xyz \text{ y } xyz' \text{ incluyen a } xy)\\
&= x'z' + x'y'z + xy + x'y' && (\text{Consenso de } x'z' \text{ y } x'y'z)\\
&= x'z' + xy + x'y' && (x'y'z \text{ incluye a } x'y')\\
&= x'z' + xy + x'y' + yz' && (\text{Consenso de } x'z' \text{ y } xy)
\end{aligned}$$

Observe que ahora ninguno de los dos pasos del método de consenso se puede aplicar. (El consenso de los primeros dos productos incluye —en realidad es igual— al último producto; el consenso de los últimos dos productos es igual al primer producto.) Así que ahora se expresa E como la suma de sus implicantes primos, $x'z'$, xy, $x'y'$, y yz'.

8.5 Use el método de consenso para encontrar los implicantes primos y una suma minimal para

$$E = xy' + xyz' + x'yz'$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
E &= xy' + xyz' + x'yz' + xz' && (\text{Consenso de } xy' \text{ y } xyz')\\
&= xy' + x'yz' + xz' && (xyz' \text{ incluye a } xz')\\
&= xy' + x'yz' + xz' + yz' && (\text{Consenso de } x'yz' \text{ y } xz')\\
&= xy' + xz' + yz' && (x'yz' \text{ incluye a } yz')
\end{aligned}$$

Ningún paso del método de consenso se puede aplicar ahora. Así, xy', xz', y yz' son los implicantes primos de E. Al escribir estos implicantes primos en la forma completa de suma de productos, obtenemos:

$$\begin{aligned}
xy' &= xy'(z + z') = xy'z + \underset{\sim}{xy'z'}\\
xz' &= xz'(y + y') = \underset{\sim}{xyz'} + \underset{\sim}{xy'z'}\\
yz' &= yz'(x + x') = \underset{\sim}{xyz'} + x'yz'
\end{aligned}$$

Solamente los sumandos xyz' y $xy'z'$ de xz' aparecen entre los otros sumandos y así se puede eliminar xz' como superfluo. Por lo tanto

$$E = xy' + yz'$$

es una suma minimal para E.

8.6 Use el método de consenso para encontrar los implicantes primos y una suma minimal para

$$E = xy + y't + x'yz' + xy'zt'$$

$$\begin{aligned}
E &= xy + y't + x'yz' + xy'zt' + xzt' && (\text{Consenso de } xy \text{ y } xy'zt')\\
&= xy + y't + x'yz' + xzt' && (xy'zt' \text{ incluye a } xzt')\\
&= xy + y't + x'yz' + xzt' + yz' && (\text{Consenso de } xy \text{ y } x'yz')\\
&= xy + y't + xzt' + yz' && (x'yz' \text{ incluye a } yz')\\
&= xy + y't + xzt' + yz' + xt && (\text{Consenso de } xy \text{ y } y't)\\
&= xy + y't + xzt' + yz' + xt + xz && (\text{Consenso de } xzt' \text{ y } xt)\\
&= xy + y't + yz' + xt + xz && (xzt' \text{ incluye a } xz)\\
&= xy + y't + yz' + xt + xz + z't && (\text{Consenso de } y't \text{ y } yz')
\end{aligned}$$

Ningún paso en el método de consenso se puede aplicar ahora. Así, los implicantes primos de E son xy, $y't$, yz', xt, xz, y $z't$. Escribiendo estos implicantes primos en forma completa de suma de productos y suprimiendo uno por uno aquellos que son superfluos, finalmente obtenemos

$$E = y't + xz + yz'$$

como una suma minimal para E.

MAPAS DE KARNAUGH

8.7 Encuentre el producto fundamental P representado por cada rectángulo básico en los mapas de Karnaugh que se muestran en la fig. 8-11.

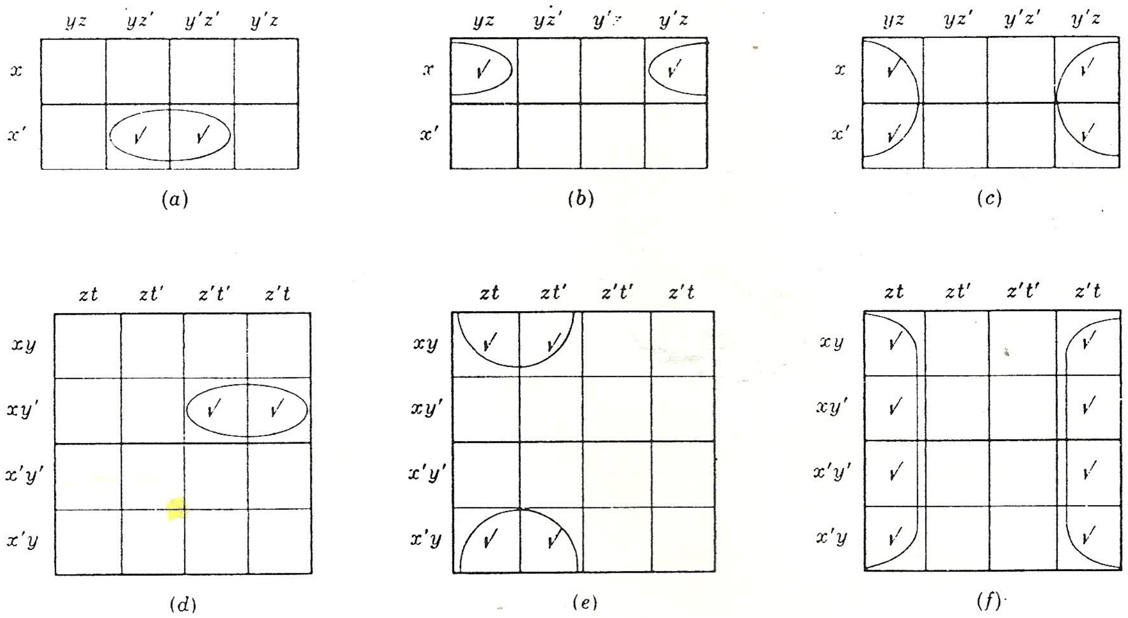


Figura 8-11

En cada caso encuentre aquellos literales que aparecen en todos los cuadrados del rectángulo básico; P es el producto de tales literales.

(*a*) x' y z' aparecen en ambos cuadrados; así $F = x'z'$.
(*b*) x y z aparecen en ambos cuadrados; así $P = xz$.
(*c*) Solamente z aparece en todos los cuatro cuadrados; así $P = z$.
(*d*) x, y' y z' aparecen en ambos cuadrados; así $P = xy'z'$.
(*e*) Solamente y y z aparecen en todos los cuatro cuadrados; así $P = yz$.
(*f*) Solamente t aparece en todos los ocho cuadrados; así $P = t$.

8.8 Encuentre una suma minimal para cada expresión E, cuyo mapa de Karnaugh se muestra en la fig. 8-12.

(*a*) Hay cinco implicantes primos, señalados por los cuatro óvalos y el círculo punteado de la fig. 8-13(*a*). Sin embargo, no se necesita el círculo punteado para recubrir todos los cuadrados mientras que sí se necesitan los cuatro óvalos. Así que los cuatro óvalos dan la suma minimal para E:

$$E = xzt' + xy'z' + x'y'z + x'z't'$$

(*b*) En la fig. 8-13(*b*) se muestra un recubrimiento minimal para E por medio de los tres óvalos. Así es una suma minimal para E.

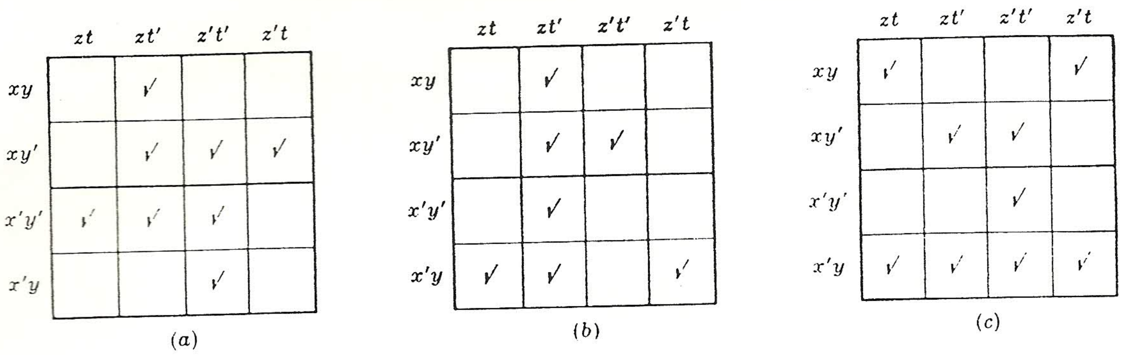


Figura 8-12

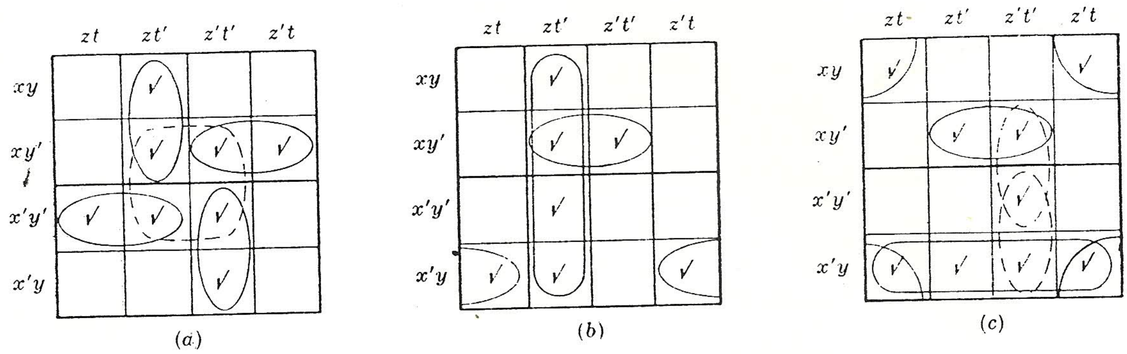


Figura 8-13

(c) Hay dos maneras de recubrir el cuadrado $x'y'z't'$ como se indica en la figura 8-13(c). Así,

$$E = x'y + yt + xy't' + y'z't' = x'y + yt + xy't' + x'z't'$$

son dos sumas minimales para E.

8.9 Use un mapa de Karnaugh para encontrar una suma minimal para

$$E = y't' + y'z' + yzt' + x'y'zt$$

Marque los cuatro cuadrados correspondientes al producto fundamental $y't'$, los cuatro cuadrados correspondientes a yzt', y el cuadrado correspondiente a $x'y'zt$. Esto da el mapa de Karnaugh en la fig. 8-14. Un recubrimiento minimal consta de los tres rectángulos básicos maximales marcados.

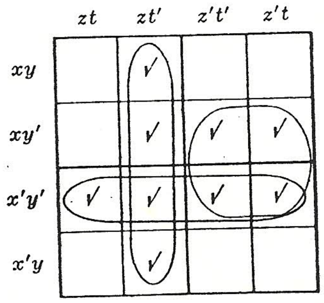


Figura 8-14

Así

$$E = zt' + y'z' + x'y'$$

es una suma minimal para E.

CIRCUITOS MINIMALES AND-OR

8.10 Dibuje un circuito AND-OR minimal que dé la siguiente tabla de verdad:

A	0 0 0 0 1 1 1 1
B	0 0 1 1 0 0 1 1
C	0 1 0 1 0 1 0 1
L	1 0 1 0 1 0 0 1

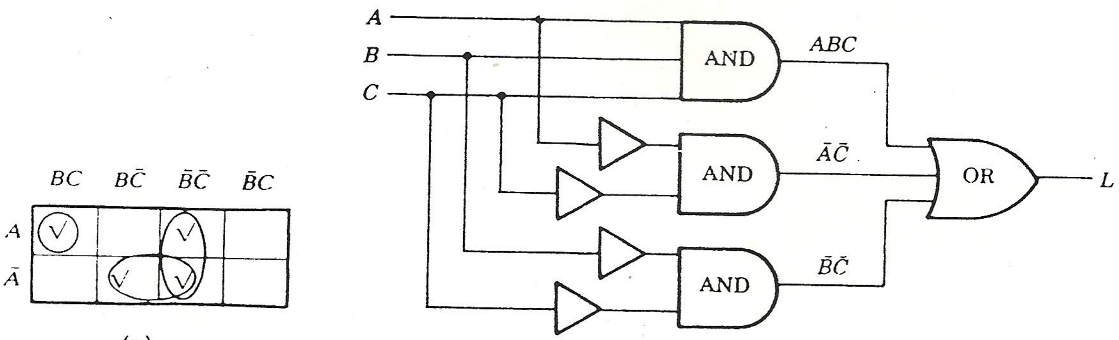
De la tabla de verdad obtenemos la representación como suma de productos.

$$L = \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C} + A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} + A\cdot B\cdot C$$

El mapa de Karnaugh de L aparece en la fig. 8-15(a). Hay tres implicantes primos, como se indica con los tres óvalos. Así

$$L = ABC + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$$

es una suma minimal para L; el correspondiente circuito AND-OR minimal aparece en la fig. 8-15(b).



(a) (b)

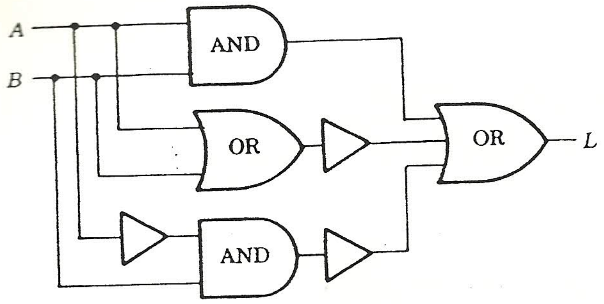
Figura 8-15

8.11 Rediseñe el circuito L de la fig. 8-16(a) para que sea un circuito minimal AND-OR.

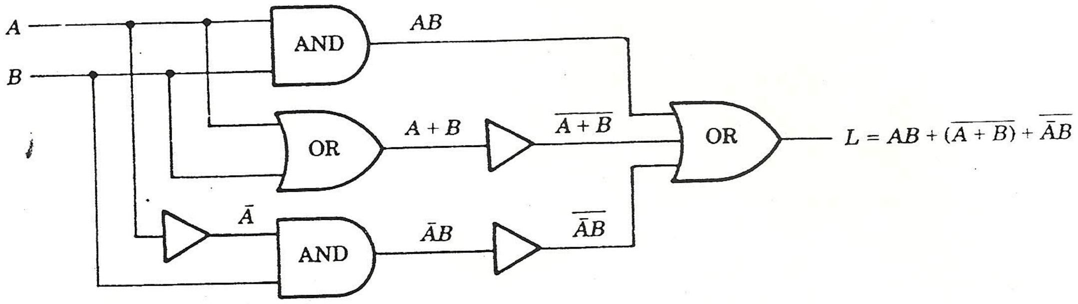
Primero, encuentre la salida del circuito rotulando sucesivamente la(s) entrada(s) y salida de cada compuerta hasta llegar a la salida del circuito, como en la fig. 8-16(b). Luego, reduzca L a una suma de productos, aplicando las leyes del álgebra de Boole:

$$L = AB + \overline{(A+B)} + \overline{\bar{A}B} = AB + \bar{A}\bar{B} + A + \bar{B} = A + \bar{B}$$

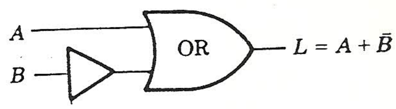
en donde en el último paso se ha usado dos veces la ley de absorción. La expresión final es, obviamente, una suma minimal para L. La fig. 8-16(c) muestra el correspondiente circuito minimal AND-OR.



(a)



(b)



(c)

Figura 8-16

8.12 Diseñe un circuito minimal AND-OR L para que tres interruptores A, B, y C, puedan controlar una misma luz de un corredor.

Un interruptor dado puede estar "encendido" (cerrado) o "apagado" (abierto), respectivamente denotado por 1 y 0. Cualquiera que sea el estado de los tres circuitos, un cambio en cada interruptor cambiará la paridad del número de 1s. El circuito, por lo tanto, logrará la función buscada si se asocia paridad impar con la luz "encendida" (representado por un 1) y paridad par con la luz apagada (representada por 0), según la siguiente tabla.

A	00001111
B	00110011
C	01010101
L	01101001

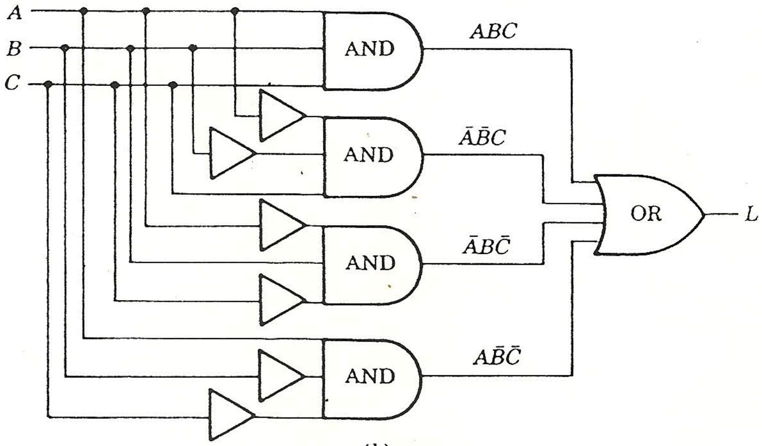
De la tabla de verdad,

$$L = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

y ésta es una suma minimal para L, como se puede verificar del mapa de Karnaugh, fig. 8-17(a). El circuito correspondiente minimal AND-OR aparece en la fig. 8-17(b).

	BC	$B\bar{C}$	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$
A	✓		✓	
$\bar{A}$		✓		✓

(a)



(b)

Figura 8-17

Problemas suplementarios

SUMAS MINIMALES, MAPAS DE KARNAUGH

8.13 Encuentre el consenso (véase el problema 8.4) de cada par de productos fundamentales:

(a) xz y xz' (c) xy y $x'zs't$ (e) $xy'zt$ y $xzs't$ → No tiene consenso

(b) $x'yt$ y $y'z$ (d) $xs't$ y $xy'st$ (f) $xy'zt$ y $x'yst$ → No se puede

8.14 Use el método del consenso (véase el problema 8.4) para encontrar los implicantes primos de:

(a) $E_1 = xy'z' + x'y + x'y'z' + x'yz$

(b) $E_2 = xy' + x'z't + xyzt' + x'y'zt'$

(c) $E_3 = xyzt + xyz't' + xz't' + x'y'z' + x'yz't$

8.15 Encuentre todas las posibles sumas minimales para cada expresión de Boole E, dado el mapa de Karnaugh de la fig. 8-18.

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	✓		✓	✓
x'	✓	✓		

(a)

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	✓		✓	✓
x'	✓	✓		✓

(b)

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	✓			✓
x'	✓	✓	✓	✓

(c)

Figura 8-18

8.16 Encuentre todas las posibles sumas minimales para cada expresión de Boole E dada por el mapa de Karnaugh de la fig. 8-9.

	zt	zt'	$z't'$	$z't$
xy		✓		✓
xy'	✓	✓		✓
$x'y'$		✓		
$x'y$	✓	✓	✓	✓

(a)

	zt	zt'	$z't'$	$z't$
xy	✓	✓	✓	
xy'		✓	✓	✓
$x'y'$		✓		
$x'y$	✓	✓	✓	

(b)

	zt	zt'	$z't'$	$z't$
xy	✓			✓
xy'		✓	✓	
$x'y'$		✓		
$x'y$	✓	✓	✓	✓

(c)

Figura 8-19

8.17 Encuentre una suma minimal para cada expresión de Boole:

(a) $E_1 = xy + x'y + x'y'$ (c) $E_3 = y'z + y'z't' + z't$

(b) $E_2 = x + x'yz + xy'z'$ (d) $E_4 = y'zt + xzt' + xy'z'$

a) $xy + x' = xy + x' + y = x' + y$

CIRCUITOS MINIMALES AND-OR

8.18 Escriba expresiones de Boole para circuitos minimales AND-OR con entrada A, B, C, que den las tablas de verdad de la fig. 8-20.

A	1 1 1 1 0 0 0 0
B	1 1 0 0 1 1 0 0
C	1 0 1 0 1 0 1 0
Y_1	1 1 0 0 1 0 0 0
Y_2	1 1 1 0 0 0 1 1
Y_3	0 0 1 1 1 1 0 1

Figura 8-20

8.19 Rediseñe el circuito L de la fig. 8-21, de tal manera que se transforme en un circuito minimal AND-OR.

8.20 Rediseñe el circuito L de la fig. 8-22, de tal manera que se transforme en un circuito mininal AND-OR.

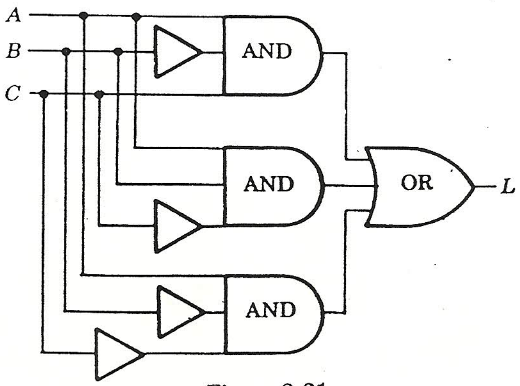


Figura 8-21

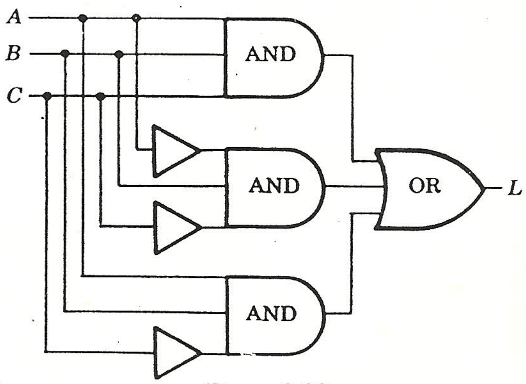


Figura 8-22

Respuestas a los problemas suplementarios

8.13 (*a*) x, (*b*) $x'zt$, (*c*) $yzs't$, (*d*) $xy't$, (*e*) no hay consenso (*f*) no hay consenso.

8.14 (*a*) $x'y$, $x'z$, $y'z'$; (*b*) xy', xzt', $y'zt'$, $x'z't$, $y'z't$; (*c*) $xyzt$, $xz't'$, $y'z't'$, $x'y'z'$, $x'z't$

8.15 (*a*) $E = xy' + x'y + yz = xy' + x'y + xz$, (*b*) $E = xy' + x'y + z$, (*c*) $E = x' + z$

8.16 (*a*) $E = x'y + zt' + yz't + xy'z = x'y + zt' + xz't + xy't$
(*b*) $E = yz + yt' + zt' + xy'z'$
(*c*) $E = x'y + yt + xy't' + x'zt = x'y + yt + xy't' + y'zt$

8.17 (*a*) $E_1 = x' + y$ (*c*) $E_3 = y' + z't$
(*b*) $E_2 = xz + yz$ (*d*) $E_4 = xy' + yzt' + y'zt$

8.18 $Y_1 = AB + BC$, $Y_2 = AB + \bar{A}\bar{B} + \bar{B}C = AB + \bar{A}\bar{B} + AC$, $Y_3 = A\bar{B} + \bar{A}B + \bar{B}\bar{C}$

8.19 $Y = A\bar{B} + A\bar{C}$

8.20 $Y = AB + B\bar{C}$