Espacios Muestrales, Combinatoria y Probabilidad

UCR – ECCI

CI-0111 Matemáticas Discretas

Prof. Kryscia Daviana Ramírez Benavides

Combinatoria

- Es la ciencia que estudia las reglas de conteo.
- Es la parte de las matemáticas discretas que estudia las diversas formas de realizar agrupaciones con los elementos de un conjunto, formándolas y calculando su número.
- Existen distintas formas de realizar estas agrupaciones, según se repitan los elementos o no, según se puedan tomar todos los elementos de que disponemos o no y si influye o no el orden de colocación de los elementos.

Combinatoria (cont.)

- En todo problema combinatorio hay conceptos claves que se debe distinguir:
  - **Población.** Conjunto de elementos que se está estudiando. Se denomina con ***n*** al número de elementos de este conjunto.
  - **Muestra.** Subconjunto de la población. Se denomina con ***r*** al número de elementos que componen la muestra.
- Los diferentes tipos de muestra se determinan por:
  - **Orden.** Es importante que los elementos de la muestra aparezcan ordenados o no.
  - **Repetición.** La posibilidad de repetición o no de los elementos.

Espacio Muestral

- En el estudio de la estadística se trata básicamente con la presentación e interpretación de resultados fortuitos que ocurren en un estudio planeado o investigación científica.
- Por ello, el estadístico a menudo trata con datos experimentales, conteos o mediciones representativos, o quizá con **datos categóricos** que se pueden clasificar de acuerdo con algún criterio.
  - Cualquier registro de información, ya sea numérico o categórico, como una **observación**.
- Los estadísticos utilizan la palabra **experimento** para describir cualquier proceso que genere un conjunto de datos.

Espacio Muestral (cont.)

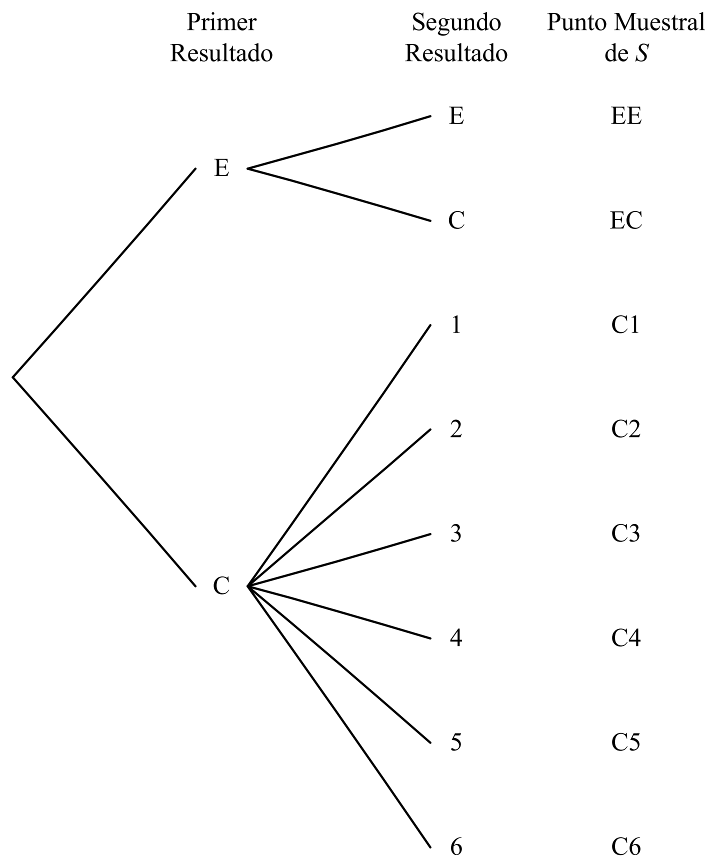
- El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estadístico se llama **espacio muestral** y se representa con el símbolo *S*.
- Cada resultado en un espacio muestral se llama **elemento** o **miembro** del espacio muestral, o simplemente **punto muestral**.
- Si el espacio muestral tiene un número finito de elementos, se puede listar los miembros separados por comas y encerrarlos en llaves.
  - **Experimento:** Lanzar un dado.
    - El espacio muestral de ver qué número sale es $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
    - El espacio muestral de ver si el número es par o impar es $S_2 = \{\text{par}, \text{impar}\}$.

Espacio Muestral (cont.)

- El ejemplo anterior ilustra que se puede usar más de un espacio muestral para describir los resultados de un experimento.
  - S_1 proporciona más información que S_2.
  - Si se sabe cuál elemento ocurre en S_1, se puede decir cuál resultado ocurre en S_2; no obstante, el conocimiento de lo que pasa en S_2 no es de ayuda en la determinación de cuál elemento en S_1 ocurre.
- En general, se desea utilizar un espacio muestral que dé la mayor información acerca de los resultados del experimento.

Espacio Muestral (cont.)

- En algunos experimentos es útil listar los elementos del espacio muestral de forma sistemática mediante un **diagrama de árbol**.
  - **Experimento:** Lanzar una moneda, y después, lanzarla una segunda vez si sale escudo o si sale corona lanzar una vez un dado.
    - S = {EE, EC, C1, C2, C3, C4, C5, C6}
- Son muy útiles para “fabricar” cualquier tipo de agrupación: variaciones, permutaciones o combinaciones.



Espacio Muestral (cont.)

- Los espacios muestrales con un número grande o infinito de puntos muestrales se describen mejor mediante un **enunciado** o **regla**.
    - **Experimento:** Conjunto de ciudades en el mundo con una población de más de un millón. El espacio muestral se escribe $S = \{x \mid x \text{ es una ciudad con una población de más de un millón}\}$, y se lee "$S$ es el conjunto de todas las x tales que x es una ciudad con una población de más de un millón".
- Si se describe el espacio muestral listando los elementos o mediante el método de la regla dependerá del problema específico en cuestión.

Eventos

- Un **evento** es un subconjunto de un espacio muestral, y se representa con una letra mayúscula.
  - **Espacio muestral:** t es la vida en años de cierto componente electrónico $S = \{t \mid t \geq 0\}$.
  - **Evento:** El componente falle antes de que finalice el 5º año $A = \{t \mid 0 \leq t < 5\}$.
- Un evento puede ser un subconjunto que incluya todo el espacio muestral S, o un subconjunto de S que se denomina **conjunto vacío** y se denota mediante el símbolo **Ø**, que no contiene elemento alguno.
  - Por ejemplo, si el evento A es detectar un organismo microscópico a simple vista en un experimento biológico, entonces $A = Ø$.

Eventos (cont.)

- El **complemento** de un evento A con respecto a S es el subconjunto de todos los elementos de S que no están en A, y se denota el complemento de A mediante el símbolo A'.
    - **Experimento:** Lanzar un dado y ver que número sale.
        - **Espacio muestral:** $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
        - **Evento A:** Salga un número par, $A = \{2, 4, 6\}$
        - **Complemento del Evento:** Salga un número que no sea par, o sea, impar, $A' = \{1, 3, 5\}$

Eventos (cont.)

- La **intersección** de dos eventos *A* y *B*, denotada mediante el símbolo $A \cap B$, es el evento que contiene a todos los elementos que son comunes a *A* y *B*.
  - **Experimento:** Lanzar un dado y ver que número sale.
    - **Espacio muestral:** $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
    - **Evento *A*:** Salga un número par, $A = \{2, 4, 6\}$
    - **Evento *B*:** Salga un número mayor a 3, $B = \{4, 5, 6\}$
    - **Intersección de los Eventos:** $A \cap B = \{4, 6\}$

Eventos (cont.)

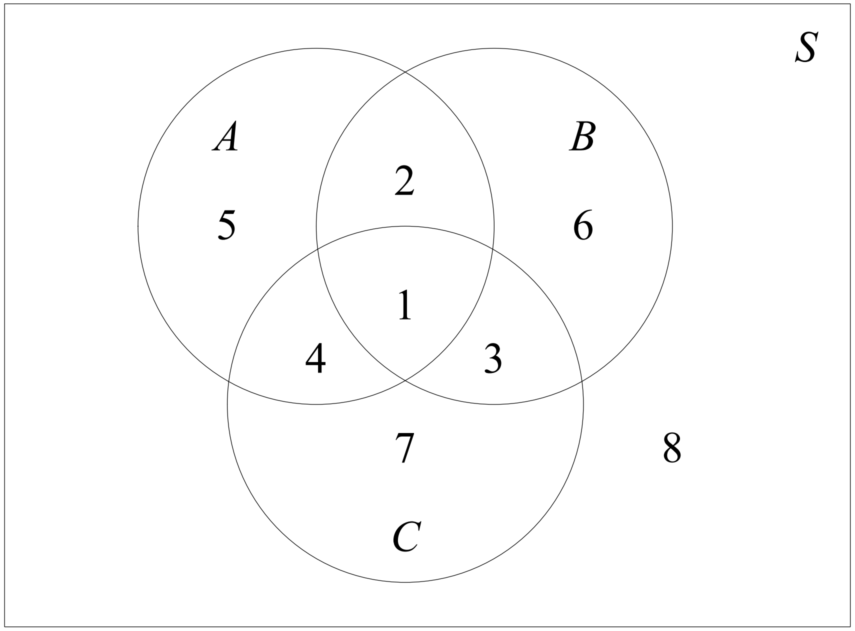
- Dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes** o **disjuntos** si $A \cap B = \varnothing$, es decir, si A y B no tienen elementos en común.
  - **Experimento:** Lanzar un dado y ver que número sale.
    - **Espacio muestral:** $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
    - **Evento A:** Salga un número par, $A = \{2, 4, 6\}$
    - **Evento B:** Salga un número impar, $B = \{1, 3, 5\}$
    - **Intersección de los Eventos:** $A \cap B = \varnothing$

Eventos (cont.)

- La **unión** de dos eventos A y B, denotada mediante el símbolo $A \cup B$, es el evento que contiene a todos los elementos que pertenecen a A o B o ambos.
  - **Experimento:** Lanzar un dado y ver que número sale.
    - **Espacio muestral:** $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
    - **Evento A:** Salga un número par, $A = \{2, 4, 6\}$
    - **Evento B:** Salga un número mayor a 3, $B = \{4, 5, 6\}$
    - **Unión de los Eventos:** $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$

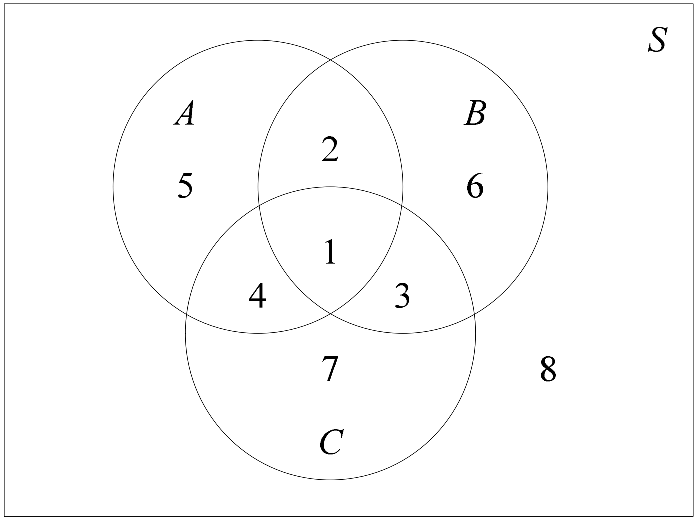
Eventos (cont.)

- La relación entre eventos y el correspondiente espacio muestral se puede ilustrar de forma gráfica mediante **diagramas de Venn**.
  - El espacio muestral se representa como un rectángulo y los eventos con círculos trazados dentro del rectángulo.
  - Cada uno de los números representa una región, en la cual hay elementos.



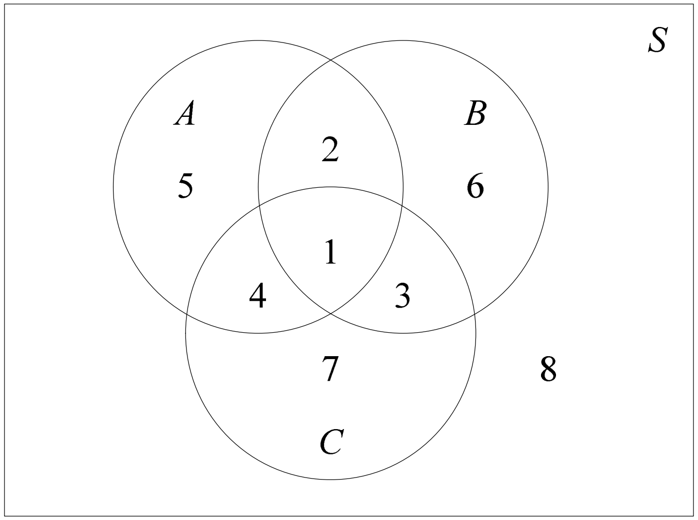
Eventos (cont.)

- Diagrama de Venn.
  - A = regiones 1, 2, 4 y 5.
  - B = regiones 1, 2, 3 y 6.
  - C = regiones 1, 3, 4 y 7.
  - A' = regiones 3, 6, 7 y 8.
  - B' = regiones 4, 5, 7 y 8.
  - C' = regiones 2, 5, 6 y 8.
  - $A \cap B \cap C$ = región 1.
  - $A \cup B \cup C$ = regiones 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.
  - $A' \cap B' \cap C'$ = región 8.
  - $A' \cup B' \cup C'$ = regiones 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.



Eventos (cont.)

- Diagrama de Venn.
  - $A \cap B$ = regiones 1 y 2.
  - $A \cap C$ = regiones 1 y 4.
  - $B \cap C$ = regiones 1 y 3.
  - $A \cup B$ = regiones 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
  - $A \cup C$ = regiones 1, 2, 3, 4, 5 y 7.
  - $B \cup C$ = regiones 1, 2, 3, 4, 6 y 7.
  - $A \cap B'$ = regiones 4 y 5.
  - …
  - $(A \cup B) \cap C'$ = regiones 2, 5 y 6.
  - …
  - $(A \cup B \cup C)'$ = región 8.



Eventos (cont.)

- Varios resultados que se derivan de las definiciones precedentes, y que, se pueden verificar de forma fácil mediante diagramas de Venn, son los siguientes:
  - $A \cap Ø = Ø$.
  - $A \cup Ø = A$.
  - $A \cap A' = Ø$.
  - $A \cup A' = S$.
  - $S' = Ø$.
  - $Ø' = S$.
  - $(A')' = A$.
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Conteo de Puntos de la Muestra

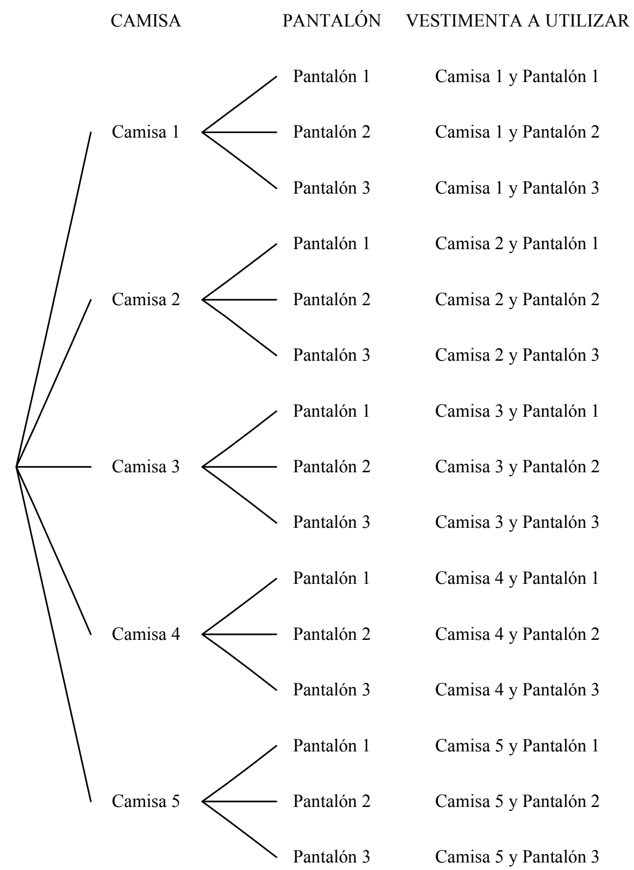
- Uno de los problemas que el estadístico debe considerar e intentar evaluar es el elemento de posibilidad asociado con la ocurrencia de ciertos eventos cuando se lleva a cabo un experimento.
- Estos problemas pertenecen al campo de la probabilidad.
- En muchos casos se debe ser capaz de resolver un problema de probabilidad mediante el conteo del número de puntos en el espacio muestral sin listar realmente cada elemento.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- El principio fundamental del conteo se denomina **regla del producto** (o **regla de multiplicación**), se formula con el siguiente teorema:
  - Si una operación se puede llevar a cabo en n_1 formas y si para cada una de estas se puede una segunda operación en n_2 formas, entonces las dos operaciones se pueden ejecutar juntas de $n_1 * n_2$ ($n_1 n_2$) formas.
    - Ejemplo: Si tengo 5 camisas y 3 pantalones para combinar, entonces tengo 5*3 = 15 maneras de vestirme al combinar esas prendas.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- En la regla de la multiplicación es útil los diagramas de árbol.
  - Se puede observar el diagrama de árbol del ejemplo anterior.
  - Los diagramas en árbol son muy útiles para “fabricar” cualquier tipo de agrupación: variaciones, permutaciones o combinaciones.



Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- La regla del producto se puede extender para cubrir cualquier número de operaciones.
- La **regla del producto generalizada** que cubre *k* operaciones se formula en el siguiente teorema:
  - Si una operación se puede llevar a cabo en n_1 formas y si para cada una de estas se puede una segunda operación en n_2 formas, y para cada una de las primeras dos se puede una tercera operación en n_3 formas, y así sucesivamente, entonces la serie de *k* operaciones se pueden ejecutar juntas de $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$ $(n_1 n_2 \ldots n_k)$ formas.
    - Ejemplo: Si tengo 5 camisas, 3 pantalones, 3 pares de medias y 2 pares de zapatos para combinar, entonces tengo 5*3*3*2 = 90 maneras de vestirme al combinar esas prendas.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- Otro principio fundamental del conteo se denomina **regla de la suma**, se formula con el siguiente teorema:
  - Si una operación se puede realizar de n_1 formas, mientras que otra operación puede realizarse de n_2 formas, y no es posible realizar ambas operaciones de manera simultánea, entonces para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera n_1+n_2 formas posibles.
    - Ejemplo: Si tengo 10 carros azules y 5 carros amarillos para escoger uno, entonces tengo $10+5 = 15$ formas de elegir un carro.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- La regla de la suma se puede extender para cubrir cualquier número de operaciones.
- La **regla de la suma generalizada** que cubre k operaciones se formula en el siguiente teorema:
  - Si una operación se puede realizar de n_1 formas, una segunda operación puede realizarse de n_2 formas, una tercera operación puede realizarse de n_3 formas, y así sucesivamente, y no es posible realizar las operaciones de manera simultánea, entonces para llevar a cabo cualquiera de las k operaciones pueden utilizarse cualquiera $n_1+n_2+\ldots+n_k$ formas posibles.
    - Ejemplo: Si tengo 10 carros azules, 5 carros amarillos y 20 carros rojos para escoger uno, entonces tengo 10+5+20 = 35 formas de elegir un carro.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- **Principio del palomar (principio de distribución)**
  - Principio de Dirichlet o principio de las cajas. El primer enunciado del principio se cree que proviene de Dirichlet en 1834 con el nombre de *Schubfachprinzip* (“principio de los cajones”).
  - Establece que si n palomas se distribuyen en m palomares, y si $n > m$, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.
  - Otra forma de decirlo es que m huecos pueden albergar como mucho m objetos si cada uno de los objetos está en un hueco distinto, así que el hecho de añadir otro objeto fuerza a volver a utilizar alguno de los huecos.
  - Ejemplo: si se toman trece personas, al menos dos habrán nacido el mismo mes.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- **Principio del palomar**
  - Sean m, n y p tres números naturales.
  - Si se desean colocar $np + m$ palomas en n cajas, alguna caja debe contener al menos $p + 1$ palomas.
  - <u>Demostración.</u> Si cada caja contiene como mucho p objetos, el número total de objetos que podemos colocar es $np < np + 1 \leq np + m$.
  - En su versión más simple, este principio dice que no puede existir una aplicación inyectiva entre un conjunto de m elementos y otro de n elementos, si $m > n$.
  - Equivalentemente, si se desean colocar m objetos en n cajas, con $m > n$, al menos una caja debe contener al menos 2 objetos.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- **Principio del palomar**
  - Una versión generalizada de este principio dice que, si *n* objetos discretos deben guardarse en *m* cajas, al menos una caja debe contener no menos de $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ objetos, donde $\lceil \ldots \rceil$ denota la función techo. Además existirá otra caja que contendrá no más de $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ objetos, donde $\lfloor \ldots \rfloor$ denota la función suelo.
  - Ejemplo: en una ciudad de más de un millón de habitantes habrá como mínimo 2740 personas que hayan nacido el mismo día del año, ya que: $\left\lceil \frac{1000000}{365} \right\rceil = \lceil 2739{,}72 \ldots \rceil = 2740$.
  - URL: https://culturacientifica.com/2015/02/11/el-principio-del-palomar-una-potente-herramienta-matematica-parte-1/.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- En ocasiones no es sencillo el contar el número de casos favorables o el número de casos posibles.
- Con frecuencia interesa un espacio muestral que contenga elementos de todas las posibles ordenaciones o arreglos de un grupo de objetos.
- Una **permutación** es un arreglo de todo o parte de un conjunto de objetos. Aquí se usa el principio fundamental de conteo regla del producto.
  - Importa el orden de los elementos.
  - No se permite la repetición de elementos.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- Cuando se utiliza en una parte de un conjunto de objetos se le suele llamar **variación**.
- Cuando se utiliza en todo el conjunto de objetos se le suele llamar **permutación**. El número de permutaciones de *n* objetos distintos es su factorial:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

$$0! = 1$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- Ejemplos:
  - Se tienen 5 estudiantes para la elección de un presidente, vicepresidente y secretario. Para elegir al presidente se tienen $n_1 = 5$ estudiantes, para elegir al vicepresidente se tienen $n_2 = 4$ estudiantes y para elegir al secretario se tienen $n_3 = 3$ estudiantes. Entonces, se tienen 5*4*3 = 60 formas para la elección.
  - La cantidad de formas en que se pueden organizar las letras a, b, c y d es:

$$4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- El número de variaciones sin repetición de *n* objetos distintos tomados de tamaño *r* es:

$$V_{n,r} = P(n,r) = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \quad 0 < r \le n$$

  - Ejemplo: La cantidad de formas en que se pueden organizar tres conferencias en 5 fechas posibles es

$$V_{5,3} = P(5,3) = {}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 * 4 * 3 = 60$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- El número de permutaciones sin repetición de *n* objetos distintos es:

$$P_n = V_{n,n} = P(n,n) = {}_nP_n = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n! \quad n = r; n, r > 0$$

  - Ejemplo: ¿Cuántas palabras pueden formarse permutando (cambiando) las letras de la palabra CARLOS?

$$P_6 = V_{6,6} = P(6,6) = {}_6P_6 = 6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- Las permutaciones que ocurren al arreglar objetos en un círculo se llaman **permutaciones circulares**.
- Dos permutaciones circulares se consideran diferentes si los objetos correspondientes en los dos arreglos están precedidos o seguidos por un objeto diferente conforme se recorra en dirección a las manecillas del reloj.
- Al considerar a un elemento en una posición fija y arreglar a los otros elementos se obtienen las permutaciones circulares.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- El número de permutaciones de *n* objetos distintos arreglados en un círculo es:

$$PC_n = P_{n-1} = (n-1)! = (n-1)(n-2)\ldots 1 \quad n = r; n, r > 0$$

  - Ejemplo: La cantidad de formas que se pueden sentar cuatro personas que juegan cartas en una mesa circular es

$$PC_4 = P_3 = (4-1)! = 3 * 2 * 1 = 6$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- Se ha considerado hasta aquí permutaciones de objetos distintos, es decir, todos los objetos son completamente diferentes o distinguibles unos de otros (sin repetición).
- El número de variaciones en una parte de un conjunto de objetos donde se permite repetir se llama **variación con repetición**, el orden importa.

$$VR_{n,r} = n^r \quad n, r > 0$$

  - Ejemplo: ¿Cuántas palabras de 4 letras pueden formarse con las letras C A R L O S pero permitiéndose que éstas se repitan?

$$VR_{6,4} = 6^4 = 1296$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- El número de permutaciones (con repetición) distintas de n objetos de los que n_1 son de una clase, n_2 son de una segunda clase, …, y n_k son de una k-ésima clase, el orden importa, es:

$$PR^{n}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

- Donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$
  - Ejemplo: La cantidad de formas de arreglar 3 focos rojos, 4 amarrillos y 2 azules en una serie de luces navideña con 9 portalámparas es

$$PR^{9}_{3,4,2} = \frac{9!}{3!4!2!} = 1260$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- Con frecuencia interesa el número de formas de dividir un conjunto de *n* objetos en *r* subconjuntos denominados **celdas**.
- Se consigue una partición si la intersección de todo par posible de los *r* subconjuntos es el conjunto vacío, y si la unión de todos los subconjuntos da el conjunto original.
- Además, el orden de los elementos dentro de una celda no tiene importancia.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- El número de formas de partir un conjunto de n objetos en r celdas con n_1 elementos en la primera celda, n_2 elementos en la segunda celda, y así sucesivamente, es:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$$

- Donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.
  - Ejemplo: La cantidad de formas en que se puede asignar siete personas a una habitación de hotel triple y a dos dobles es

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- En muchos problemas interesa el número de formas de seleccionar r objetos de n sin importar el orden.
- Estas selecciones se llaman combinaciones; una **combinación** es realmente un partición con dos celdas, una celda contiene los r objetos seleccionados y la otra contiene los $(n - r)$ objetos restantes.
- El número de tales combinaciones, denotado por $\binom{n}{r, n-r}$ se reduce a $\binom{n}{r}$.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- El número de combinaciones de *n* objetos distintos tomados de *r* a la vez es:

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad 0 < r \leq n$$

  - Ejemplo: La cantidad de formas de seleccionar a 3 químicos de 7 es

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- En cada combinación $\{1,\ldots,r\}$ se obtienen $r!$ variaciones permutando los símbolos entre sí (123...r, 213... r, etc.).

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{V_{n,r}}{r!} \quad 0 < r \leq n$$

- Los números combinatorios aparecen al calcular las diferentes potencias de un binomio, $(a+b)^1 = a + b$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, etc.; y se conoce como fórmula de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- De la fórmula de Newton se obtiene el **triángulo de Pascal** o **de Tartaglia**.
- Puede comprobarse que el número que aparece en la fila n en la posición $r + 1$, que representaremos mediante $C_{n,r}$. Los números de una fila se obtienen sumando los situados justamente encima de él.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- En muchos problemas interesa el número de formas de seleccionar, con repetición, r de n objetos distintos sin importar el orden.
- Esta selección se llama distribución (una **combinación con repetición**), es el número de combinaciones de n objetos tomados de r en r, con repeticiones.

$$CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} \quad n, r > 0$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- Para trabajar con este tipo de agrupaciones se recurre a un artificio para hallar el número $CR_{n,r}$ reduciéndolo al caso de las combinaciones ordinarias (sin repetición).
- Lo que se hace es establecer una correspondencia biunívoca entre las combinaciones con repetición de orden r de n elementos $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, y las combinaciones ordinarias de orden r de $(n + r - 1)$ elementos $\{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n+r-1}\}$.

$$CR_{n,r} = C_{n+r-1,r} = \frac{V_{n+r-1,r}}{P_{r,r}} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} \quad n, r > 0$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- Esta correspondencia se fundamenta en distinguir entre las diversas posiciones de un mismo elemento repetido, teniendo en cuenta su puesto en la combinación con repetición: se incrementa el índice de cada elemento en tantas unidades como elementos le preceden en el grupo; es decir: el índice del 1º, 2º, 3º, ..., *n*º elemento, se aumenta en 0, 1, 2, 3, ..., *n*-1 unidades.

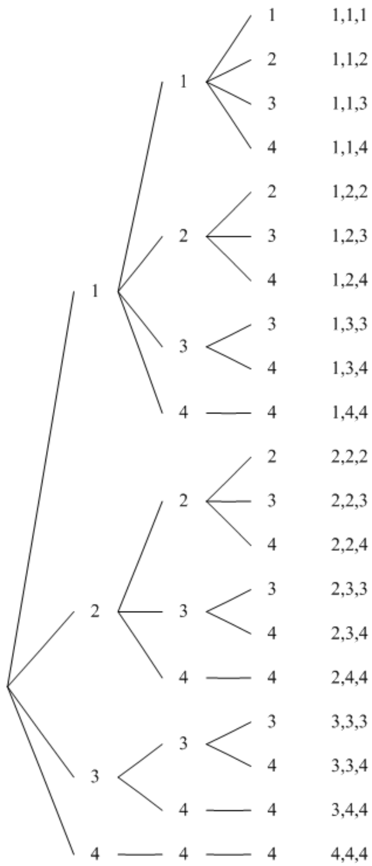
Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

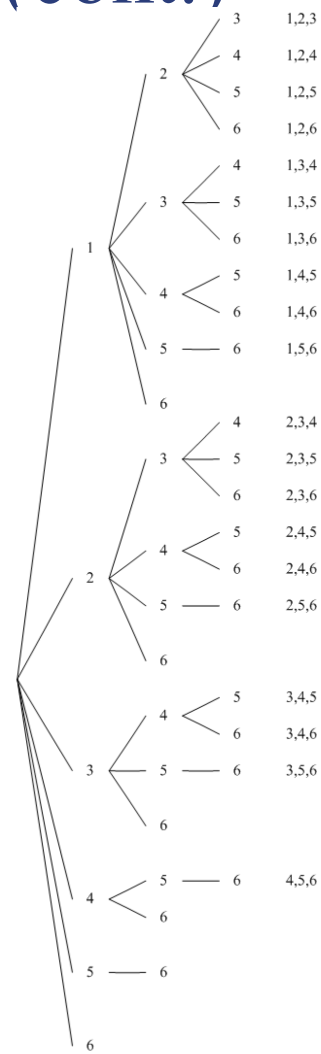
- Ejemplo: $CR_{4,3}$.
  - Existe correspondencia entre las combinaciones con repetición de orden 3 de 4 elementos $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, y las combinaciones ordinarias de orden 3 de 6 elementos $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$; $6 = 4 + 3 - 1$.
  - De este modo los índices resultan todos distintos y crecientes, pues dos elementos consecutivos reciben índices que, por lo menos, difieren en 1.

$$CR_{4,3} = C_{6,3} = 20$$

$$a_1a_1a_1 \to c_1c_2c_3$$
$$a_1a_1a_2 \to c_1c_2c_4$$
$$a_1a_1a_3 \to c_1c_2c_5$$
$$a_1a_1a_4 \to c_1c_2c_6$$
$$a_1a_2a_2 \to c_1c_3c_4$$
$$a_1a_2a_3 \to c_1c_3c_5$$
$$a_1a_2a_4 \to c_1c_3c_6$$
$$a_1a_3a_3 \to c_1c_4c_5$$
$$a_1a_3a_4 \to c_1c_4c_6$$
$$a_1a_4a_4 \to c_1c_5c_6$$
$$a_2a_2a_2 \to c_2c_3c_4$$
$$etc.$$

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)





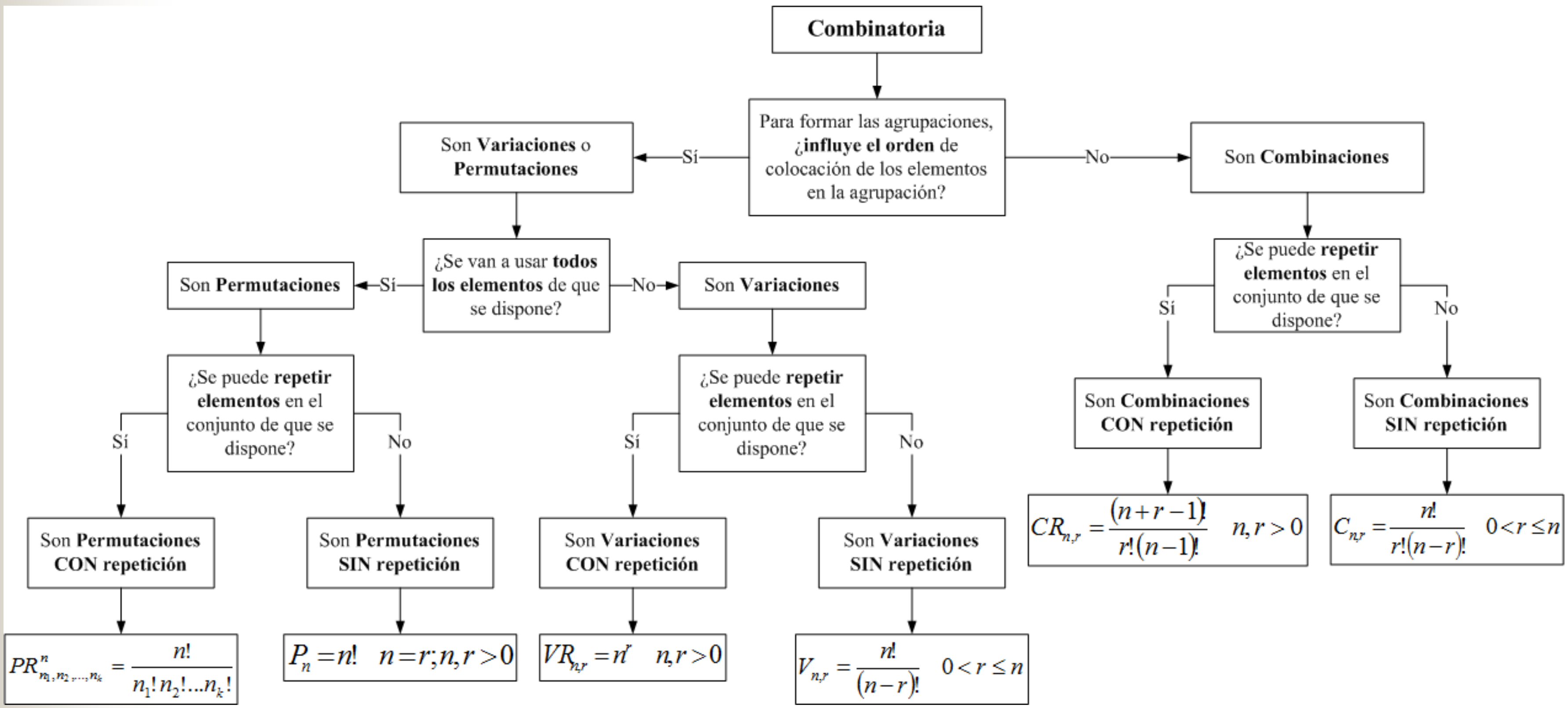
Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- Ejemplo: El capitán de un barco puede cargar 5 contenedores. Puede elegir entre tres mercancías diferentes: transistores, ordenadores o cintas de video, habiendo en el puerto existencias suficientes de las tres ¿Cuántas opciones tiene?

$$CR_{3,5} = \binom{3+5-1}{5} = C_{7,5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

  - Se trata de calcular el número de subconjuntos de 5 elementos que pueden formarse con los elementos de {T,O,C} permitiendo la repetición de éstos.

Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)



Conteo de Puntos de la Muestra (cont.)

- Tomado: Ejercicios Combinatoria (PDF), elaborado por Ildefonso Aranda y Paco Cuenca, profesores de Matemáticas de I.E.S.
- Ejercicios (Sitio Web)

	SIN Repetición	CON Repetición
VARIACIONES	V_n^p	VR_n^p
PERMUTACIONES	P_n	$PR_n^{a,b,c}$
COMBINACIONES	C_n^p	CR_n^p

- Otro: Combinatoria-Ejercicios.

Probabilidad de un Evento

- La probabilidad de la ocurrencia de un evento que resulta de un experimento estadístico se evalúa por medio de un conjunto de números reales denominados **pesos** o **probabilidades** que van de 0 a 1.
- Para todo punto en el espacio muestral asignamos una probabilidad tal que la suma de todas las probabilidades es 1.
- La **probabilidad** de un evento A es la suma de los pesos de todos los puntos muestrales en A. Por tanto,

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\varnothing) = 0, \text{ y} \quad P(S) = 1$$

Probabilidad de un Evento (cont.)

- **Experimento #1:** Se lanza dos veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que salga al menos un escudo?
  - Espacio muestral: $S = \{EE, EC, CE, CC\}$
    - Si la monda está balanceada cualquiera de los resultados tiene la misma probabilidad de ocurrencia.
    - Por lo tanto, se asigna una probabilidad w a cada uno de los puntos muestrales. Entonces, $4w = 1$, o $w = 1/4$.
  - Evento A: Salga al menos un escudo, $A = \{EE, EC, CE\}$
  - Probabilidad del Evento A: $P(A) = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4$

Probabilidad de un Evento (cont.)

- **Experimento #2:** Se lanza una vez un dado que está cargado, los pares tienen doble probabilidad de salir. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 4?
  - Espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
    - Se asigna una probabilidad w a cada número impar y una probabilidad de $2w$ a cada número par. Entonces, $9w = 1$, o $w = 1/9$.
  - Evento A: Salga un número menor a 4, $A = \{1, 2, 3\}$
  - Probabilidad del Evento A: $P(A) = 1/9 + 2/9 + 1/9 = 4/9$

Probabilidad de un Evento (cont.)

- **Experimento #3:** Se lanza una vez un dado que está cargado, los pares tienen doble probabilidad de salir. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par y que sea divisible entre 3?
  - Espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
    - Se asigna una probabilidad w a cada número impar y una probabilidad de $2w$ a cada número par. Entonces, $9w = 1$, o $w = 1/9$.
  - Evento A: Salga un número par, $A = \{2, 4, 6\}$
  - Evento B: Salga un número divisible entre 3, $B = \{3, 6\}$
  - Probabilidad de $A \cap B$: $P(A \cap B) = 2/9$

Probabilidad de un Evento (cont.)

- **Experimento #4:** Se lanza una vez un dado que está cargado, los pares tienen doble probabilidad de salir. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par o que sea divisible entre 3?
  - Espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
    - Se asigna una probabilidad w a cada número impar y una probabilidad de $2w$ a cada número par. Entonces, $9w = 1$, o $w = 1/9$.
  - Evento A: Salga un número par, $A = \{2, 4, 6\}$
  - Evento B: Salga un número divisible entre 3, $B = \{3, 6\}$
  - Probabilidad de $A \cup B$: $P(A \cup B) = 2/9 + 1/9 + 2/9 + 2/9 = 7/9$

Probabilidad de un Evento (cont.)

- Si un experimento puede tener como resultado cualquiera de N diferentes resultados igualmente probables, y si exactamente n de estos resultados corresponden al evento A, entonces la probabilidad del evento A es

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Probabilidad de un Evento (cont.)

- **Experimento #1:** Una persona hace una selección aleatoria de uno de los dulces; en los cuales hay un surtido que contiene seis mentas, cuatro chicles y tres chocolates. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una menta?
  - Espacio muestral: S = {M1, M2, M3, M4, M5, M6, C1, C2, C3, C4, Ch1, Ch2, Ch3}
    - Como hay 6 mentas de los 13 dulces, cada menta tiene una probabilidad de 1/13.
  - Evento A: Sacar una menta, A = {M1, M2, M3, M4, M5, M6}
  - Probabilidad del Evento A: $P(A) = 6 * 1/13 = 6/13$

Probabilidad de un Evento (cont.)

- **Experimento #2:** Una persona hace una selección aleatoria de uno de los dulces; en los cuales hay un surtido que contiene seis mentas, cuatro chicles y tres chocolates. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un chicle o un chocolate?
  - Espacio muestral: S = {M1, M2, M3, M4, M5, M6, C1, C2, C3, C4, Ch1, Ch2, Ch3}
    - Como hay 7 de los 13 dulces que son chicles o chocolates, cada menta tiene una probabilidad de 1/13.
  - Evento A: Sacar un chicle, A = {C1, C2, C3, C4}
  - Evento B: Sacar un chocolate, B = {Ch1, Ch2, Ch3}
  - Probabilidad del Evento $A \cup B$: $P(A \cup B) = 4 * 1/13 + 3 * 1/13 = 7/13$

Probabilidad de un Evento (cont.)

- **Experimento #3:** Se tiene una mano de póquer que consiste de cinco cartas. ¿Cuál es la probabilidad de tener dos ases y tres reinas?
  - Sacar dos ases de cuatro es

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

  - Sacar tres reinas de cuatro es

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

  - El cantidad de manos de dos ases y tres reinas es 6 * 4 = 24.

Probabilidad de un Evento (cont.)

- **Experimento #3:** Se tiene una mano de póquer que consiste de cinco cartas. ¿Cuál es la probabilidad de tener dos ases y tres reinas?
  - El número total de manos de cinco cartas, las cuales son igualmente probables es

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = 2{,}598{,}960$$

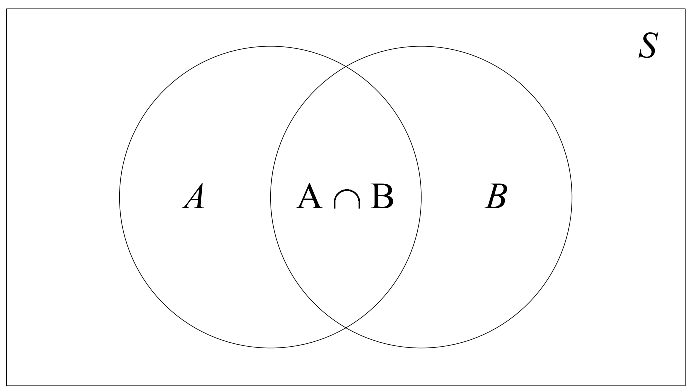
  - Por lo tanto, la probabilidad del evento A de obtener dos ases y tres reinas en una mano de póquer de cinco cartas es

$$P(A) = \frac{24}{2{,}598{,}960} = 0.9 \times 10^{-5}$$

Reglas Aditivas

- La **regla aditiva** es una de varias leyes importantes que con frecuencia simplifica el cálculo de probabilidades, y se aplica a uniones de eventos.
- **Teorema:** Se A y B son cualesquiera eventos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Reglas Aditivas (cont.)

- **Corolarios:**
  - Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces

    $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

  - Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes, entonces

    $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

  - Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una partición de un espacio muestral S, entonces

    $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

    $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(S) = 1$$

Reglas Aditivas (cont.)

- **Teorema:** Para tres eventos *A*, *B* y *C*, se tiene

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) = \quad & P(A) + P(B) + P(C) \\
& - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
& + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

- **Teorema:** Si *A* y *A'* son eventos complementarios, entonces

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = P(S) = 1$$

Probabilidad Condicional

- La probabilidad de que un evento B ocurra cuando se sabe que ya ocurrió algún evento A se llama **probabilidad condicional** y se denota por $P(B \mid A)$.
  - El símbolo $P(B \mid A)$ por lo general se lee "la probabilidad que ocurra B dado que ocurrió A", o simplemente "la probabilidad de B dado A".
- La probabilidad condicional, denotada por $P(B \mid A)$, se define como:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{si } P(A) > 0$$

Probabilidad Condicional (cont.)

- **Ejemplo:** La probabilidad de que un vuelo programado salga a tiempo es $P(B) = 0.83$; la probabilidad de que llegue a tiempo es $P(A) = 0.82$; y la probabilidad de que salga y llegue a tiempo es $P(A \cap B) = 0.78$.Encuentre la probabilidad de que un avión llegue a tiempo dado que salió a tiempo y que salió a tiempo dado que llegó a tiempo.
  - Probabilidad de que llegue a tiempo dado que salió a tiempo:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

  - Probabilidad de que salió a tiempo dado que llegó a tiempo:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

Probabilidad Condicional (cont.)

- Dos eventos *A* y *B* son **independientes** si y sólo si

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B \mid A) = P(B)$$

- De otra forma, *A* y *B* son **dependientes**.
  - Ejemplo: Es un experimento donde hay que sacar 2 cartas una después de la otra de una baraja ordinaria, con reemplazo. Los eventos se definen como:
    - Evento *A*: La primera carta es un as.
    - Evento *B*: La segunda carta es un corazón.
      - Como la primera carta se reemplaza, el espacio muestral para la primera y segunda carta consiste en 52 cartas, que contienen cuatro ases y 13 corazones.

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \qquad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

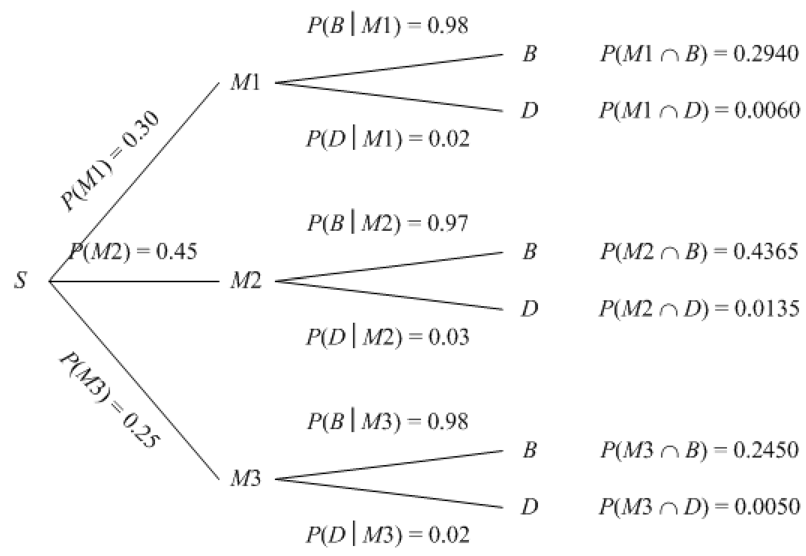
$$P(A \cap B) = \frac{1}{52} \qquad P(B \mid A) = \frac{1/52}{4/52} = \frac{1}{4}$$

Probabilidad Condicional (cont.)

- Ejemplo: En una planta de montaje, tres máquinas, M_1, M_2 y M_3, montan 30%, 45% y 25% de los productos, respectivamente. Se sabe que 2%, 3% y 2% de los productos ensamblados por cada máquina, respectivamente, tienen defectos. Se selecciona de forma aleatoria un producto terminado. ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?
  - Se tienen los siguientes eventos:
    - M_1: El producto está ensamblado por la máquina B_1.
    - M_2: El producto está ensamblado por la máquina B_2.
    - M_3: El producto está ensamblado por la máquina B_3.
    - B: El producto está bueno.
    - D: El producto está defectuoso.

Probabilidad Condicional (cont.)

- Con el diagrama de árbol encontramos las tres ramas que dan las probabilidades:
  - $P(M_1)P(D|M_1) = 0.30*0.02 = 0.0060.$
  - $P(M_2)P(D|M_2) = 0.45*0.03 = 0.0135.$
  - $P(M_3)P(D|M_3) = 0.25*0.02 = 0.0050.$
  - $P(D) = 0.0060 + 0.0135 + 0.0050 = 0.0245$



Reglas Multiplicativas

- La **regla multiplicativa** es una de varias leyes importantes que con frecuencia simplifica el cálculo de probabilidades, y se aplica a intersecciones de eventos.
- **Teorema:** Si en un experimento pueden ocurrir los eventos *A* y *B*, entonces

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$
$$P(B \cap A) = P(B)P(A \mid B)$$
$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

Reglas Multiplicativas (cont.)

- **Teorema:** Dos eventos A y B son independientes si y sólo si
$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)P(B)$$
- **Teorema:** Si en un experimento pueden ocurrir los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, entonces
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$
- **Teorema:** Si los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes, entonces
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

Referencias Bibliográficas

- Jonnsonbaugh, Richard. “Matemáticas Discretas”. Prentice Hall, México. Sexta Edición, 2005.
- Walpole, R.E.; Myers, R.H. & Myers, S.L. "Probabilidad y estadística para ingenieros". Sexta Edición. Pearson Prentice-Hall. México, 1999.
- Material docente de la Unidad de Bioestadística Clínica. URL: http://www.hrc.es/bioest/M_docente.html.
- http://www.vitutor.com/pro/1/a_r.html.
- http://club.telepolis.com/ildearanda/index.html.