Recursión y Relaciones de Recurrencia

UCR – ECCI

CI-0111 Estructuras Discretas

Prof. Kryscia Daviana Ramírez Benavides

Algoritmos Recursivos

- Un algoritmo es **recursivo** si se soluciona un problema reduciéndolo a una instancia del mismo problema con la entrada más pequeña.

ALGORITHM 1 A Recursive Algorithm for Computing $n!$.

procedure *factorial*(n: nonnegative integer)
if $n = 0$ **then return** 1
else return $n \cdot factorial(n - 1)$
{output is $n!$}

ALGORITHM 2 A Recursive Algorithm for Computing a^n.

procedure *power*(a: nonzero real number, n: nonnegative integer)
if $n = 0$ **then return** 1
else return $a \cdot power(a, n - 1)$
{output is a^n}

ALGORITHM 3 A Recursive Algorithm for Computing $\gcd(a, b)$.

procedure *gcd*(a, b: nonnegative integers with $a < b$)
if $a = 0$ **then return** b
else return $gcd(b \textbf{ mod } a, a)$
{output is $\gcd(a, b)$}

ALGORITHM 4 Recursive Modular Exponentiation.

procedure *mpower*(b, n, m: integers with $b > 0$ and $m \geq 2, n \geq 0$)
if $n = 0$ **then**
    return 1
else if n is even **then**
    return $mpower(b, n/2, m)^2 \textbf{ mod } m$
else
    return $(mpower(b, \lfloor n/2 \rfloor, m)^2 \textbf{ mod } m \cdot b \textbf{ mod } m) \textbf{ mod } m$
{output is $b^n \textbf{ mod } m$}

ALGORITHM 5 A Recursive Linear Search Algorithm.

```
procedure search(i, j, x: i, j, x integers, 1 ≤ i ≤ j ≤ n)
if a_i = x then
      return i
else if i = j then
      return 0
else
      return search(i + 1, j, x)
{output is the location of x in a_1, a_2, ..., a_n if it appears; otherwise it is 0}
```

ALGORITHM 6 A Recursive Binary Search Algorithm.

```
procedure binary search(i, j, x: i, j, x integers, 1 ≤ i ≤ j ≤ n)
m := ⌊(i + j)/2⌋
if x = a_m then
      return m
else if (x < a_m and i < m) then
      return binary search(i, m − 1, x)
else if (x > a_m and j > m) then
      return binary search(m + 1, j, x)
else return 0
{output is location of x in a_1, a_2, ..., a_n if it appears; otherwise it is 0}
```

Recursión e Iteración

ALGORITHM 7 A Recursive Algorithm for Fibonacci Numbers.

procedure *fibonacci*(n: nonnegative integer)
if $n = 0$ **then return** 0
else if $n = 1$ **then return** 1
else return *fibonacci*$(n - 1)$ + *fibonacci*$(n - 2)$
{output is *fibonacci*(n)}

ALGORITHM 8 An Iterative Algorithm for Computing Fibonacci Numbers.

procedure *iterative fibonacci*(n: nonnegative integer)
if $n = 0$ **then return** 0
else
    $x := 0$
    $y := 1$
    for $i := 1$ to $n - 1$
        $z := x + y$
        $x := y$
        $y := z$
    return y
{output is the nth Fibonacci number}

Recursión e Iteración

ALGORITHM 9 A Recursive Merge Sort.

procedure *mergesort*$(L = a_1, \ldots, a_n)$
if $n > 1$ **then**
  $m := \lfloor n/2 \rfloor$
  $L_1 := a_1, a_2, \ldots, a_m$
  $L_2 := a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$
  $L := merge(mergesort(L_1),\ mergesort(L_2))$
$\{L$ is now sorted into elements in nondecreasing order$\}$

ALGORITHM 10 Merging Two Lists.

procedure *merge*$(L_1, L_2:$ sorted lists$)$
$L :=$ empty list
while L_1 and L_2 are both nonempty
  remove smaller of first elements of L_1 and L_2 from its list; put it at the right end of L
  if this removal makes one list empty **then** remove all elements from the other list and
   append them to L
return $L\{L$ is the merged list with elements in increasing order$\}$

Progresión Geométrica

- Es una sucesión infinita de números donde el cociente de cualquier término (distinto del primero) entre su predecesor es una constante llamada **razón común**.
- Ejemplos:
  - 5, 15, 45, 135, …

    15/5 = 3, 45/15 = 3, 135/45 = 3, …

    15 = 3*5, 45 = 3*15, 135 = 3*45, …
  - 7, 21, 63, 189, …

    21/7 = 3, 63/21 = 3, 189/63 = 3, …

    21 = 3*7, 63 = 3*21, 189 = 3*63, …

Relación de Recurrencia

- Es una ecuación en donde para obtener el valor actual se depende de uno o más valores predecesores inmediatos a él.

$$c_n a_n^{e_0} + c_{n-1} a_{n-1}^{e_1} + c_{n-2} a_{n-2}^{e_2} + \ldots + c_{n-k} a_{n-k}^{e_k} = f(n), n \geq k$$

$$a_0 = A_0, a_1 = A_1, \ldots, a_{k-1} = A_{k-1}$$

- Donde:
  - $k \in \mathbf{Z}^+$, determina el orden de la relación y debe ser $n \geq k$.
  - $e_i \in \mathbf{Z}^+$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, k$, determina si la relación es lineal o no.
  - $f(n)$ es una función dada, $n \in \mathbf{N}$ y de orden k.
  - Cada $c_{n-i} \in \mathbf{R}$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, k$ y $c_n \neq 0$. Son los coeficientes de la relación.
  - Cada $a_j \in \mathbf{R}$, $\forall j = 0, 1, 2, \ldots, k$-1. Son las condiciones frontera o iniciales.

Relación de Recurrencia (cont.)

- Una relación de recurrencia para una sucesión $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ es una fórmula que expresa cada término a_n, a partir de cierto $n \in \mathbf{N}$, en función de uno o más de los términos que le preceden.
- Los valores de los términos necesarios para empezar a calcular se llaman condiciones iniciales.
- Se dice que una sucesión es una solución de la relación de recurrencia si su término general verifica dicha relación.

Relación de Recurrencia (cont.)

- Las relaciones de recurrencia pueden considerarse como técnicas avanzadas de conteo.
- Resuelve problemas cuya solución no puede obtenerse usando variaciones, permutaciones, combinaciones o con las técnicas derivadas del principio de inclusión-exclusión.

Relación de Recurrencia (cont.)

- Ejemplos:
  - 5, 15, 45, 135, …

    $a_{n+1} = 3a_n,\ a_0 = 5\ ,\ n \geq 0$
  - 7, 21, 63, 189, …

    $a_{n+1} = 3a_n,\ a_0 = 7\ ,\ n \geq 0$

Relación de Recurrencia (cont.)

- Toda relación de recurrencia tiene:
  - Coeficientes, pueden ser constantes o variables, que son valores que están multiplicando cada término con subíndice de la relación de recurrencia.
  - Condiciones frontera o iniciales, que son los valores iniciales que se necesitan para resolver la relación de recurrencia, y se denotan como $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.

Relación de Recurrencia (cont.)

- **Torres de Hanoi.** Se tienen n discos y 3 estacas. Los discos están apilados en la estaca 1, ordenados de mayor a menor. El objetivo es pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original. En el proceso no se permite que un disco mayor se coloque sobre otro menor. Si a_n es el número de movimientos que se requieren para hacer esto, encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n.

Relación de Recurrencia (cont.)

- **Torres de Hanoi.** **(http://www.uterra.com/juegos/torre_hanoi.php)**
- Para mover n discos basta mover $n - 1$ discos a una estaca libre, mover el disco mayor a la otra estaca libre y mover de nuevo los $n - 1$ discos sobre el disco mayor:
  - $a_n = 2a_{n-1} + 1$
  - Condición inicial: $a_1 = 1$

Relación de Recurrencia (cont.)

- Sea $M = \{A,B,C\}$ y sea S_n el conjunto de sucesiones de longitud n, formadas con las letras de M, en las que todas las cadenas de As son de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular S_n.

Relación de Recurrencia (cont.)

- Las sucesiones de longitud n formadas con las letras $\{A,B,C\}$ en las que todas las cadenas de As son de longitud par, se dividen en tres grupos: las que empiezan por A, las que empiezan por B y las que empiezan por C.
  - Las que empiezan por A, a continuación de la A han de tener otra A y a continuación una sucesión de longitud $n - 2$ en las que todas las cadenas de As son de longitud par.
  - Las que empiezan por B o C, a continuación han de llevar una sucesión de longitud $n - 1$ en las que todas las cadenas de As son de longitud par.

Relación de Recurrencia (cont.)

- Recíprocamente, si a una palabra de longitud $n - 2$ en las que todas las cadenas de As son de longitud par se agrega AA delante obtenemos una sucesión de longitud n en las que todas las cadenas de As son de longitud par, y si a una palabra de longitud $n - 1$ en las que todas las cadenas de As son de longitud par, se agrega delante B o C obtenemos una sucesión de longitud n en las que todas las cadenas de As son de longitud par

Relación de Recurrencia (cont.)

- La relación de recurrencia es:
  - $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$
- Condiciones iniciales:
  - $a_0 = 1$ (existe una única sucesión de longitud 0, la palabra vacía, en las que todas las cadenas de *A*s son de longitud par)
  - $a_1 = 2$ (existen 2 sucesiones de longitud 1, las sucesiones *B* y *C*, en las que todas las cadenas de *A*s son de longitud par),
  - $a_2 = 5$ (existen 5 sucesiones de longitud 2 en las que todas las cadenas de *A*s son de longitud par, las sucesiones *AA;BB;BC;CB;CC*)
- No es necesario calcular a_2 pero dado que a_0 es discutible, sirve para comprobar que $a_2 = 2a_1 + a_0$ y por tanto a_0 es coherente con la relación de recurrencia

Relación de Recurrencia (cont.)

- Una relación de recurrencia puede ser:
  - Primer Orden: Cuando la relación de recurrencia sólo depende de su predecesor inmediato. Ejemplo: $a_{n+1} = 3\boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 5$, $n \geq 0$.
  - Segundo Orden: Cuando la relación de recurrencia depende de sus dos predecesores inmediatos. Ejemplo: $a_n = \boldsymbol{a_{n-1}} + 5\boldsymbol{a_{n-2}}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $n \geq 2$.
  - Lineal: Cuando cada término con subíndice de la relación de recurrencia aparece elevado a la primera potencia. Ejemplo: $\boldsymbol{a_{n+1}} = 3\boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 5$, $n \geq 0$.
  - No Lineal: Cuando algún término con subíndice de la relación de recurrencia aparece elevado a una potencia diferente a la primera potencia. Ejemplo: $\boldsymbol{a_{n+1}^2} = 3\boldsymbol{a_n^2}$, $a_0 = 5$, $n \geq 0$.

Relación de Recurrencia (cont.)

- Una relación de recurrencia puede ser:
  - Homogénea: Cuando $f(n) = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Ejemplo: $a_{n+1} = 3a_n \Rightarrow a_{n+1} - 3a_n = \mathbf{0}$, $a_0 = 5$, $n \geq 0$.
  - No Homogénea: Cuando $f(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Ejemplo: $a_{n+1} = 3a_n + n \Rightarrow a_{n+1} - 3a_n = \boldsymbol{n}$, $a_0 = 5$, $n \geq 0$.
  - Coeficientes Constantes: Cuando cada término con subíndice de la relación de recurrencia está multiplicado por una constante. Ejemplo: $a_{n+1} = \mathbf{3}a_n$, $a_0 = 5$, $n \geq 0$.
  - Coeficientes Variables: Cuando algún término con subíndice de la relación de recurrencia está multiplicado por una valor variable. Ejemplo: $a_n = \boldsymbol{n}a_{n-1}$, $a_0 = 1$, $n \geq 1$.

Relaciones de Recurrencia (cont.)

- La **solución general** de una relación de recurrencia es el valor de a_n es una función de n que no depende de los términos anteriores de la sucesión, una vez definido las condiciones frontera o iniciales, que se obtiene a partir de la relación de recurrencia.

Solución General: Relaciones de Recurrencia de Primer Orden, Lineales, Homogéneas y con Coeficientes Constantes

- La relación de recurrencia

$$a_{n+1} = ca_n,\ a_0 = A_0,\ n \geq 0$$

- Donde:
  - c es una constante diferente de cero.
  - $a_0 = A_0$ es única.
- La solución general de dicha relación está dada por

$$a_n = A_0 c^n,\ n \geq 0.$$

- Está última ecuación es una función discreta cuyo dominio es el conjunto **N** de los enteros no negativos.

Solución General: Relaciones de Recurrencia de Segundo Orden, Lineales, Homogéneas y con Coeficientes Constantes

- La relación de recurrencia

$$c_{n+2}a_{n+2} + c_{n+1}a_{n+1} + c_n a_n = 0,\ a_0 = A_0,\ a_1 = A_1,\ n \geq 0$$

- Donde:
  - c_{n+2}, c_{n+1} y c_n son constantes diferentes de cero.
  - $a_0 = A_0$ y $a_1 = A_1$ son únicas.
- Para obtener la solución general de dicha relación:
  - Se sustituye $a_n = dr^n$, donde $d \neq 0$ y $r \neq 0$, se obtiene:

$$c_{n+2}dr^{n+2} + c_{n+1}dr^{n+1} + c_n dr^n = 0.$$

  - Se saca como factor común dr^n, se obtiene una ecuación cuadrática llamada **ecuación característica**:

$$c_{n+2}r^2 + c_{n+1}r^1 + c_n r = 0.$$

Solución General: Relaciones de Recurrencia de Segundo Orden, Lineales, Homogéneas y con Coeficientes Constantes (cont.)

- Para obtener la solución general de dicha relación:
  - Se resuelve la ecuación cuadrática y se obtiene las raíces de esa ecuación r_1 y r_2, estas son llamadas **raíces características**.
    - Estas raíces pueden ser: números reales distintos, números reales iguales y números complejos conjugados. Sólo se analizará los dos primeros casos.
  - Si las raíces obtenidas son **números reales distintos** se va formando la solución general de la siguiente manera:

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n.$$

  - Si las raíces obtenidas son **números reales iguales** se va formando la solución general de la siguiente manera:

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 n r_2^n.$$

Solución General: Relaciones de Recurrencia de Segundo Orden, Lineales, Homogéneas y con Coeficientes Constantes (cont.)

- Para obtener la solución general de dicha relación:
  - Una vez que se tiene este avance de la solución general con las condiciones frontera o iniciales se forma un sistema de ecuaciones y se halla c_1 y c_2.

$$\left.\begin{array}{lcl} a_0 = c_1 r_1^{\,0} + c_2 r_2^{\,0} & \Rightarrow & A_0 = c_1 + c_2 \\ a_1 = c_1 r_1^{\,1} + c_2 r_2^{\,1} & \Rightarrow & A_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 \end{array}\right\} \quad \text{Raíces reales diferentes}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} a_0 = c_1 r_1^{\,0} + c_2 0 r_2^{\,0} & \Rightarrow & A_0 = c_1 \\ a_1 = c_1 r_1^{\,1} + c_2 1 r_2^{\,1} & \Rightarrow & A_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 \end{array}\right\} \quad \text{Raíces reales iguales}$$

  - Con los valores que se obtengan de las raíces r_1 y r_2, y las constantes c_1 y c_2 se obtiene la solución general de la relación de recurrencia:

$$a_n = c_1 r_1^{\,n} + c_2 r_2^{\,n},\ n \geq 0 \Rightarrow \text{Raíces diferentes.}$$

$$a_n = c_1 r_1^{\,n} + c_2 n r_2^{\,n},\ n \geq 0 \Rightarrow \text{Raíces iguales.}$$

Solución General: Relaciones de Recurrencia de Primer o Segundo Orden, Lineales, No Homogéneas y con Coeficientes Constantes

- La relación de recurrencia

$$c_{n+2}a_{n+2} + c_{n+1}a_{n+1} + c_n a_n = f(n),\ a_0 = A_0,\ a_1 = A_1,\ n \geq 0$$

- Donde:
  - $f(n) \neq 0$.
  - c_{n+2}, c_{n+1} y c_n son constantes diferentes de cero.
  - $a_0 = A_0$ y $a_1 = A_1$ son únicas.
- Para obtener la solución general de dicha relación se suma la **solución homogénea asociada a_n^h** y la **solución particular a_n^p**.

Solución General: Relaciones de Recurrencia de Primer o Segundo Orden, Lineales, No Homogéneas y con Coeficientes Constantes (cont.)

- Para obtener la solución general de dicha relación se realiza lo siguiente:
  - Se resuelve la relación homogénea asociada como se conoce sin sacar las constantes, con los pasos anteriormente dados, y así se obtendrá la **solución homogénea asociada a_n^h**.
  - Luego, se obtiene la **solución particular a_n^p** observando la función dada $f(n)$ y buscando en la tabla 1.
  - Si a_n^p contiene raíces distintas a las obtenidas en a_n^h, entonces se pasa al siguiente paso. Si contiene una raíz igual a las obtenidas en a_n^h, entonces $a_n^p = na_n^p$ y se pasa al siguiente paso. Si contiene dos raíces iguales a las obtenidas en a_n^h, entonces $a_n^p = n^2a_n^p$ y se pasa al siguiente paso.

Solución General: Relaciones de Recurrencia de Primer o Segundo Orden, Lineales, No Homogéneas y con Coeficientes Constantes (cont.)

$f(n)$	a_n^p
c, constante	A, constante
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
n^t, $t \in \mathbf{Z}+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$
r^n, $r \in \mathbf{R}$	$A r^n$
$n^t r^n$	$r^n(A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$

Tabla 1

Solución General: Relaciones de Recurrencia de Primer o Segundo Orden, Lineales, No Homogéneas y con Coeficientes Constantes (cont.)

- Para obtener la solución general de dicha relación se realiza lo siguiente:
  - Se obtiene el valor de cada constante de la a_n^p, o sea, las constantes $A_t, A_{t-1}, \ldots, A_1, A_0$; lo cual se logra sustituyendo cada término a_n de la relación de recurrencia dada por la a_n^p y resolviendo la ecuación. Por ejemplo: $f(n) = r^n$, por lo tanto $a_n^p = Ar^n$, entonces se obtiene algo así:

    $$c_{n+2}Ar^{n+2} + c_{n+1}Ar^{n+1} + c_nAr^n = r^n$$
  - Con la solución homogénea asociada a_n^h y la solución particular a_n^p obtenidas se tiene la solución general de la relación de recurrencia

    $$a_n = a_n^h + a_n^p.$$
  - Por último, se calcula los valores c_1 y c_2 de la solución homogénea asociada, mediante un sistema de ecuaciones, sustituyendo con las condiciones iniciales dadas. Con esto se obtiene la solución general de la relación de recurrencia.

Transformación de una Relación de Recurrencia No Lineal a Lineal

- Se puede transforma una relación de recurrencia no lineal a lineal para poder resolverla mediante una sustitución algebraica $b_n = a_n^2$.
  - Ejemplo:

$$a_{n+1}^2 = 3a_n^2,\ a_0 = 3,\ n \geq 0$$
$$b_{n+1} = 3b_n,\ b_0 = 9,\ n \geq 0$$

- Una vez hecho esto se puede resolver como una relación de recurrencia lineal, para este ejemplo corresponde a una relación de primer orden, homogénea y con coeficientes constantes.

Transformación de una Relación de Recurrencia No Lineal a Lineal

- Después de resolverla se saca la raíz a cada número obtenido en la solución general para tener la solución general de la relación de recurrencia no lineal.
  - Ejemplo:

$$b_n = 9*3^n, n \geq 0$$
$$a_n = 3*\sqrt{3^n}, n \geq 0$$

Referencias Bibliográficas

- Jonnsonbaugh, Richard. "Matemáticas Discretas". Prentice Hall, México. Sexta Edición, 2005.
- Grimaldi, Ralph P. "Matemática Discreta y Combinatoria". Addison Wesley Longman de México, S.A. Tercera Edición, 1998.