Capítulo 5

El principio del palomar

El objetivo de este capítulo, que dedicamos al principio del palomar[1], es ilustrar las insospechadas aplicaciones de un principio, que en su versión más sencilla, afirma que

> *si tenemos n nidos y en ellos duermen $n+1$ palomas, al menos hay un nido en el que duerme más de una paloma.*

Como ya discutíamos en la sección 1.3, se trata de la solución a un **problema de existencia**[2]. Aquí simplemente estamos afirmando que, si tenemos suficientes palomas, en este caso $n+1$, entonces, sea cual sea la distribución de palomas en los n nidos, hay al menos dos que comparten una propiedad, la de dormir en el mismo nido. Por supuesto, habrá distribuciones en las que haya más palomas con esa propiedad (imaginemos que todas ellas duermen en el mismo nido), pero esto nos nos interesa aquí. Nada decimos sobre de cuántas formas se pueden distribuir las palomas, sólo aseguramos que. . .

Ya hemos utilizado muchas veces este principio en las páginas precedentes. Lo hicimos, y profusamente, en la sección 4.2, al tratar la aritmética en $\mathbb{Z}_m$; y la clave, por supuesto, era que $\mathbb{Z}_m$ es un conjunto finito.

El tipo de argumentos que allí utilizábamos se pueden reescribir en un contexto distinto, y quizás más atractivo. Digamos que un cierto conjunto X que contiene a todas las posibles situaciones o estados del mundo. Supongamos que X es finito, por ejemplo de tamaño n, y que la evolución entre estos posibles estados viene dada por una cierta función $f: X \to X$. Si nuestra situación inicial es $x_0 \in X$, la Historia es la sucesión de estados

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0) \ldots$$

Si consideramos, por ejemplo, los primeros $n+1$ estados del mundo, $(x_0, f(x_0), \ldots, f^n(x_0))$, el principio del palomar nos dice que en esa lista hay, con seguridad, dos repetidos. Digamos que son $f^j(x_0)$ y $f^k(x_0)$, con $j<k$. Pero entonces

$$f^{j+1}(x_0) = f(f^j(x_0)) = f(f^k(x_0)) = f^{k+1}(x_0)\,.$$

[1]También llamado **principio de Dirichlet** o de las cajas.

[2]En su forma más general, podríamos formularlos de la siguiente manera: dado un cierto sistema, si éste es suficientemente grande, entonces existen subsistemas no pequeños que satisfacen una cierta propiedad. En los capítulos 18 y 19 veremos algunos resultados generales de este tipo.

Así que el estado del mundo $f^{j+1}(x_0)$ coincide con $f^{k+1}(x_0)$. Y lo mismo para los siguientes. Por lo tanto, en esta sucesión de estados habrá un patrón que se repite indefinidamente. Así que toda Historia es cíclica a partir de un cierto momento[3].

5.1. Distintas formulaciones del principio del palomar

Reformulemos este principio en un lenguaje menos exótico que el de los nidos y las palomas: sea un conjunto $\mathcal{X}$ de n objetos que distribuimos en k cajas. El principio del palomar reza entonces que si $n > k$, hay al menos una caja recibe **dos** (o más) objetos.

Si ocurriera que $n > 2\,k$, entonces podríamos asegurar que al menos una caja recibe **tres** o más objetos (piénsese en el peor caso: $2\,k$ objetos situados de dos en dos en cada caja... y aún queda algún objeto por repartir). Y, en general, dado un $r \geq 1$, si $n > k\,r$, entonces al menos una caja recibe $r+1$ (o más) objetos.

Con un lenguaje más matemático, podríamos enunciarlo de la siguiente manera:

Proposición 5.1 *Sean dos conjuntos $\mathcal{X}$ (con n elementos) e $\mathcal{Y}$ (con k elementos) y una aplicación*

$$f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}.$$

(a) Entonces, sea cual sea la aplicación f, si $n > k$ hay al menos dos elementos de $\mathcal{X}$, x_1 y x_2 ($x_1 \neq x_2$) tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

(b) O, en términos más generales, si $n > k\,r$, para cierto $r \geq 1$, hay al menos $r+1$ elementos distintos de $\mathcal{X}$, $x_1, x_2, \ldots, x_r$, tales que

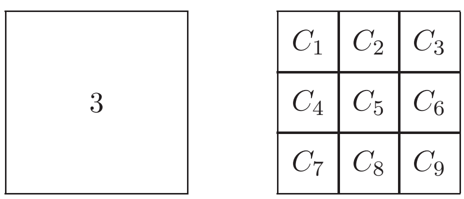
$$f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_r)\,.$$

En el lenguaje zoológico usado antes, los elementos de $\mathcal{X}$ serían las palomas, los de $\mathcal{Y}$ los nidos, y la aplicación f es aquélla que indica en qué nido duerme cada paloma. Diríamos entonces que si hay n nidos y k palomas, donde $n > k\,r$, entonces habrá, con seguridad, al menos $r+1$ palomas durmiendo en el mismo nido. El caso $r = 1$ es el principio del palomar habitual.

Por supuesto, la dificultad a la hora de aplicar el principio del palomar será identificar en cada problema qué desempeña el papel de nidos y de palomas, e describir la aplicación f. Empecemos reescribiendo el ejemplo 1.3.1.

Ejemplo 5.1.1 *Sea un cuadrado de diagonal 3 en el que marcamos al azar 10 puntos. Demostrar que siempre tenemos al menos dos puntos que están a distancia no mayor que 1.*

Dividimos el cuadrado en 9 cuadraditos de diagonal 1 (incluyendo sus bordes):



[3] Es, claro, un argumento de eterno retorno, que Nietzsche utilizaba explícitamente.

Sean $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$ el conjunto de puntos e $\mathcal{Y} = \{C_1, C_2, \ldots, C_9\}$ el de cuadraditos, y construyamos la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{Y} \\ x_j &\longmapsto f(x) = \text{cuadrado } C_k \text{ en el que está } x \end{aligned}$$

Si x estuviera en más de un cuadrado, elegimos uno cualquiera; digamos que el que menor subíndice tenga (esto es, si está entre C_5 y C_8, elegimos el C_5). Aplicando el principio del palomar, sea cual sea la aplicación concreta f (la distribución de puntos), deberán existir al menos dos puntos con la misma imagen, es decir, que estén en el mismo cuadradito. Y como los cuadraditos tienen diagonal 1, esos dos puntos distarán como mucho una unidad. ♣

Ejemplo 5.1.2 *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto arbitrario de 20 números naturales. Probar que hay al menos dos elementos de $\mathcal{X}$ cuya diferencia es un múltiplo de 19.*

En un lenguaje que ya manejamos bien, buscamos dos elementos de $\mathcal{X}$ cuya diferencia sea congruente con 0 módulo 19. Así que consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathcal{X} &\longrightarrow \{0, 1, \ldots, 18\} \\ n &\longmapsto f(n) = n \pmod{19} \end{aligned}$$

Por el principio del palomar, al menos dos elementos de $\mathcal{X}$, digamos n_1 y n_2, tienen la misma imagen: $f(n_1) = f(n_2)$. Pero entonces

$$n_1 \equiv n_2 \pmod{19},$$

y, por tanto, $n_1 - n_2 \equiv 0$ módulo 19. Que es lo que queríamos. ♣

A veces no podemos aplicar directamente el principio del palomar, y se requiere una “preparación” inicial:

Ejemplo 5.1.3 *Supongamos que en una reunión hay n personas y nos preguntamos por el número de personas que conoce cada una. Convenimos que si una persona conoce a otra, ésta también conoce a la primera; y que*[4] *“nadie se conoce a sí mismo”. Probar que hay al menos dos personas que tienen el mismo número de conocidos.*

Sea $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ al conjunto de personas; cada una de ellas tendrá un cierto número de conocidos, y este número estará en el conjunto $\mathcal{Y} = \{0, \ldots, n-1\}$. Construimos la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{Y} \\ x_j &\longmapsto f(x_j) = \#\{\text{conocidos de } x_j\}. \end{aligned}$$

Aparentemente, no podemos aplicar el principio del palomar, porque $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ tienen el mismo número de elementos, n. Pero vamos a ver que, en realidad, la aplicación f nunca puede cubrir todo $\mathcal{Y}$. Distingamos dos posibilidades:

[4] Aquí haremos caso omiso de la máxima *nosce te ipsum*, el “conócete a tí mismo” que aparecía inscrito en el pórtico del templo de Apolo en Delfos.

1. Supongamos que existe una persona x con $f(x) = 0$ (es decir, que no conoce a nadie). Entonces f no puede tomar el valor $n-1$ (si existiera una persona que conociera a todas, debería conocer también a x). Así que f toma valores en el conjunto $\{0, 1, \ldots, n-2\}$, que tiene $n-1$ elementos. Aplicando el principio del palomar, concluimos que, en este caso, al menos dos personas tienen el mismo número de conocidos.

2. Si no existe esa persona que no conoce a nadie, entonces f no toma el valor 0, y acabamos aplicando de nuevo el principio del palomar. ♣

El siguiente ejemplo es algo más complicado: la primera idea no funciona, pero nos da la clave que permite resolverlo.

EJEMPLO 5.1.4 *Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de números naturales. Mostrar que hay un subconjunto $\mathcal{T} \in \mathcal{S}$ tal que la suma de todos sus elementos es un múltiplo de $|\mathcal{S}|$.*

Llamemos n al tamaño de $\mathcal{S}$. Parece claro que deberemos considerar las sumas de los elementos de $\mathcal{S}$ módulo n: lo que buscamos es una suma que sea $\equiv 0$ módulo n. Un primer intento sería establecer la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_1 : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{Y} = \{0, \ldots, n-1\} \\ \mathcal{T} \quad &\longrightarrow \quad \phi_1(\mathcal{T}) = \sum_{a \in \mathcal{T}} a \pmod{n}. \end{aligned}$$

Es decir, ϕ_1 es la aplicación que a cada subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ le asocia el valor (módulo n) de la suma de sus elementos. Queremos ver si ϕ_1 toma necesariamente el valor 0.

Como en $\mathcal{X}$ hay 2^n elementos y en $\mathcal{Y}$ hay n (y sabemos que $2^n > n$, para $n \geq 1$), el principio del palomar nos permite concluir que hay al menos dos subconjuntos $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ de $\mathcal{S}$ tales que

$$\sum_{a \in \mathcal{T}_1} a \equiv \sum_{b \in \mathcal{T}_2} b \pmod{n},$$

y que, por tanto,

$$\sum_{a \in \mathcal{T}_1} a - \sum_{b \in \mathcal{T}_2} b \equiv 0 \pmod{n}.$$

¿Podemos deducir de aquí lo que queremos? Si ocurriera que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ (o al revés), es fácil comprobar que sí. Pero recordemos que el principio del palomar no nos dice nada sobre cómo son estos subconjuntos $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, sólo que existen; así que éste no parece ser el camino.

Lo que debemos hacer es escoger más cuidadosamente los subconjuntos: empecemos ordenando los elementos de $\mathcal{S}$, digamos de menor a mayor,

$$\mathcal{S} = \{a_1 < \ldots < a_n\}.$$

Vamos a considerar los subconjuntos $\{a_1\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_2, a_3\}$, etc. Construyamos la función

$$\begin{aligned} \phi_2 : \{1, \ldots, n\} \quad &\longrightarrow \quad \{0, \ldots, n-1\} \\ i \quad &\longrightarrow \quad \phi_2(i) = \sum_{k=1}^{i} a_k \pmod{n}. \end{aligned}$$

La función ϕ_2 devuelve los valores (módulo n) de las sucesivas sumas a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, etc., que podemos formar. Como ambos conjuntos, el de partida y el de llegada, tienen n elementos, tendremos que distinguir dos casos:

- Si existe un i con $\phi_2(i) = 0$, habremos terminado, porque tendríamos que

  $$\sum_{k=1}^{i} a_k \equiv 0 \pmod{n}$$

  y por tanto, el conjunto buscado sería $\mathcal{T} = \{a_1, \dots, a_i\}$.

- Si, por el contrario, no existe tal i, entonces la aplicación ϕ_2 sólo tomaría valores en $\{1, \dots, n-1\}$. Y el principio del palomar nos diría que existen $i < j$ tales que $\phi_2(i) = \phi_2(j)$. Esto es,

  $$\sum_{k=1}^{j} a_k \equiv \sum_{k=1}^{i} a_k \pmod{n} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=i+1}^{j} a_k \equiv 0 \pmod{n}.$$

  Y el conjunto buscado sería $\mathcal{T} = \{a_{i+1}, \dots, a_j\}$. ♣

Como vemos, la aplicación del principio del palomar a la resolución de problemas suele requerir algo de ingenio. Los ejercicios del final de la sección son un buen entrenamiento que recomendamos al lector. Antes de acabar esta introducción, veamos un ejemplo más: se trata de uno con el que empezaremos el capítulo 19 dedicado a la Teoría de Ramsey. Se resuelve con el principio del palomar, pero ya tiene algún ingrediente más.

Ejemplo 5.1.5 *Comprobar que en una reunión de seis personas, o bien tres de ellas se conocen entre sí, o bien tres de ellas no se conocen entre sí.*

Seguimos con la convención del ejemplo 5.1.3: si una persona conoce a otra, al revés también, y nadie se conoce a sí mismo. En el capítulo 19 describiremos este problema en términos de grafos, lo que resulta más adecuado; pero aquí hagámoslo con los conjuntos. Llamemos $\{a, b, c, d, e, f\}$ al conjunto de personas, y fijémonos en una de ellas, digamos a. Situamos a las otras cinco personas en dos cajas, según conozcan o no a a. El principio del palomar nos dice que una de las cajas contendrá (al menos) a tres personas.

Digamos que estamos en el caso de que sea la caja con "conocidos" la que tiene al menos tres personas (un argumento análogo funciona en el otro caso). La persona a conoce, por ejemplo, a las personas b, c y d. Y ahora fijémonos en este grupo: si alguno de ellos se conoce entre sí, digamos b y c, ya tendríamos un grupo de tres "amigos" (a, b y c, en este caso). Pero si no es así, estaríamos en la segunda opción del enunciado: b, c y d formarían un grupo de (tres) desconocidos. ♣

Aunque quizás aquí no se aprecie todavía, este ejemplo ya nos pone en el camino de los resultados de tipo Ramsey que veremos en el capítulo correspondiente. Observemos que el espíritu sigue siendo el mismo: un sistema grande (seis personas en este caso), en el que necesariamente subsistemas "no pequeños" cumplen cierta propiedad.

5.1.1. Otras versiones del principio del palomar

Empecemos con una observación casi obvia: en un conjunto de n números naturales no puede ocurrir que todos ellos estén por encima de la media (o por debajo). Enunciémoslo convenientemente:

Proposición 5.2 *Dados n números naturales $x_1, \dots, x_n$ tales que su suma vale S, alguno de ellos ha de ser mayor o igual que S/n.*

DEMOSTRACIÓN. Si no ocurriera eso, entonces todos los x_i serían menores que S/n. Y tendríamos que

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{S}{n} = n\,\frac{S}{n} = S,$$

lo que no tiene sentido. ■

Por supuesto, el mismo argumento nos permite concluir que existe un elemento que es menor o igual que S/n. Con esta idea, podemos dar una formulación más general del principio del palomar:

Proposición 5.3 *Sean dos conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ (finitos y no vacíos) y sea una aplicación $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$. Entonces,*

(a) Existe un elemento $\widetilde{y} \in \mathcal{Y}$ tal que $\left|f^{-1}(\widetilde{y})\right| \geq \dfrac{|\mathcal{X}|}{|\mathcal{Y}|}$.

(b) Existe un elemento $\widehat{y} \in \mathcal{Y}$ tal que $\left|f^{-1}(\widehat{y})\right| \leq \dfrac{|\mathcal{X}|}{|\mathcal{Y}|}$.

DEMOSTRACIÓN. Estamos aquí utilizando la notación habitual para nombrar el conjunto de preimágenes del elemento $y \in \mathcal{Y}$:

$$f^{-1}(y) = \{x \in \mathcal{X} \,:\, f(x) = y\}\,.$$

Por ser f una aplicación (cada elemento de $\mathcal{X}$ tiene una única imagen), se tendrá que

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}} \left|f^{-1}(y)\right| = |\mathcal{X}|\,,$$

Entonces, por la proposición anterior, existirá al menos un elemento $\widetilde{y} \in \mathcal{Y}$ tal que

$$\left|f^{-1}(\widetilde{y})\right| \geq \frac{|\mathcal{X}|}{|\mathcal{Y}|}\,.$$

Un argumento análogo permite probar la parte (b) del enunciado. ■

Por ejemplo, si $|\mathcal{X}| = n+1$ y $|\mathcal{Y}| = n$, deduciríamos que existe un elemento $\widetilde{y}$ de $\mathcal{Y}$ tal que

$$\left|f^{-1}(\widetilde{y})\right| \geq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}\,.$$

Y como el número de la izquierda es un entero, entonces ha de ser mayor o igual que 2, el principio del palomar habitual. Y en general, si $|\mathcal{X}| > r\,|\mathcal{Y}|$ para cierto número natural r, entonces existirá un $y \in \mathcal{Y}$ tal que

$$\left|f^{-1}(y)\right| \geq \frac{|\mathcal{X}|}{|\mathcal{Y}|} > r\,.$$

En otras palabras, existen al menos $r+1$ elementos de $\mathcal{X}$ cuya imagen es el elemento y.

Ejemplo 5.1.6 *En un grupo de 7 personas, la suma de las edades es 332 años. Probar que se puede escoger a tres de ellas de manera que la suma de sus edades sea al menos 143 años.*

Llamemos $x_1, \dots, x_7$ a las edades, ordenadas de mayor a menor. Sabemos que

$$332 = x_1 + x_2 + x_3 + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7)\,.$$

Como están ordenadas de mayor a menor, la suma de las tres mayores edades ha de ser mayor (o igual) que la suma de cualesquiera otras tres edades. Es decir, $x_1 + x_2 + x_3$ será mayor o igual que cualquiera de la sumas

$$x_4 + x_5 + x_6\,, \quad x_4 + x_5 + x_7\,, \quad x_4 + x_6 + x_7\,, \quad x_5 + x_6 + x_7\,.$$

Sumando estas cuatro desigualdades, llegamos a que

$$4(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3\,(x_4 + x_5 + x_6 + x_7)\,.$$

Entonces,

$$332 = x_1 + x_2 + x_3 + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \leq \left(1 + \frac{4}{3}\right)\,(x_1 + x_2 + x_3)\,,$$

esto es,

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{332 \times 3}{7} > 142\,.$$

Pero podríamos abordar el problema utilizando el principio del palomar. Con las 7 personas podemos formar $\binom{7}{3} = 35$ triples distintos. Pero cada persona aparecerá en $\binom{6}{2} = 15$ triples (basta decidir qué dos personas le acompañan). Entonces se cumplirá que

$$\sum_{\text{triples } T} \Bigg(\sum_{\text{elementos } p \text{ de } T} \text{edad } (p) \Bigg) = 15 \times 332\,.$$

Como hay 35 triples distintos, la suma de las edades de alguno de ellos ha de ser mayor o igual que

$$\frac{332 \times 15}{35} \approx 142{,}28 > 142\,. \qquad \clubsuit$$

Ejemplo 5.1.7 *Un conjunto $\mathcal{X}$ de 100 elementos se parte en 14 bloques. Probar que hay 2 bloques con el mismo número de elementos.*

Llamemos x_i al tamaño del bloque i-ésimo. Entonces, $100 = \sum_{i=1}^{14} x_i$. Si todos los x_i fueran distintos, entonces tendríamos que

$$100 = \sum_{i=1}^{14} x_i \geq \sum_{i=1}^{14} i = \frac{14 \times 15}{2} = 105\,.$$

Pero esto no puede ocurrir, así que al menos dos han de ser iguales. ♣

Finalicemos con una última versión del principio del palomar, en el que el conjunto de "palomas" es infinito; de nuevo, el enunciado es bastante obvio: se dispone de una cantidad infinita de objetos que se han de repartir en un conjunto finito de cajas. Entonces,

al menos una caja contiene un número infinito de objetos.

Veremos pronto algunos ejemplos interesantes en los que esta afirmación resulta muy útil.

EJERCICIOS.

5.1.1 *(a) Sea una sucesión de números $p_1, \ldots, p_N$ no negativos tales que $0 < \sum_{j=1}^{N} p_j \leq M$. Si nos damos una sucesión de números $x_j \geq 0$ tales que*

$$\sum_{j=1}^{N} p_j\, x_j \geq a\,,$$

entonces existirá al menos un $x_j \geq a/M$.
(b) Deducir del ejercicio anterior que si los $p_j > 0$ suman 1, entonces existirá un $x_j \geq a$.

5.1.2 *¿Cuántas veces debe lanzarse un par de dados para asegurar que la puntuación suma se repita?; ¿y para asegurar que alguna puntuación suma aparece cuatro veces?*

Sugerencia. Basta contar cuántas puntuaciones distintas podemos obtener al lanzar los dos dados.

5.1.3 *Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto de $\{1, 2, 3, \cdots, 2n\}$ y sea $\mathcal{Y} = \{1, 3, 5, \cdots, 2n-1\}$. ($\mathcal{Y}$ es el conjunto de los impares menores que $2n$.) Definimos la función $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ como*

$$f(x) = \text{mayor divisor impar de } x$$

(a) Probar que si $|\mathcal{X}| \geq n + 1$ entonces f no es inyectiva.
(b) Deducir que si $|\mathcal{X}| \geq n+1$, entonces existen x_1 y x_2 elementos distintos de $\mathcal{X}$ de forma que x_1 divide a x_2.
(c) Dar un subconjunto de $\{1, 2, 3, \cdots, 2n\}$ de tamaño n, de forma que si x_1, x_2 son elementos cualesquiera de $\mathcal{X}$ entonces x_1 no divide a x_2.

5.1.4 *Se forman todas las listas con repetición con los símbolos $\{1, \ldots, 100\}$ de longitud 10. Dos listas se dicen primas entre sí si en alguna posición tienen el mismo símbolo. ¿Cuál es el número máximo de listas que se pueden extraer de forma que cada dos de las extraídas no sean primas entre sí?*

Sugerencia. Observar que las listas $(1,\dots,1),(2,\dots,2),\dots,(100,\dots,100)$ son primas entre sí.

5.1.5 *¿Cuál es el menor número n que permite garantizar que en cualquier conjunto de números naturales con n elementos haya al menos tres elementos que dan el mismo resto al dividirlos por 100?*

Sugerencia. Contar cuántos posibles restos hay.

5.1.6 *Supongamos que distribuimos al azar los números de* 1 *a* 10 *en un círculo. Comprobar que la suma de algún subconjunto de tres consecutivos es al menos* 17*.*

Sugerencia. Llamando a los valores sobre el círculo $a_1,\dots,a_{10}$ y definiendo $A_1 = a_1+a_2+a_3, A_2 = a_2+a_3+a_4,\dots,A_{10} = a_{10}+a_1+a_2+a_1$, evaluar la suma $A_1+\cdots+A_{10}$.

5.1.7 *Probar que existe un múltiplo de 2001 cuyo desarrollo decimal está compuesto únicamente por unos.*

Sugerencia. Considerar el conjunto de todos los números cuyo desarrollo decimal está compuesto por unos y agruparlos según el resto módulo 2001.

5.1.8 *Dentro de un cuadrado 1×1 se dan 101 puntos. Probar que hay 3 que determinan un triángulo de área a lo sumo* 0,01*.*

5.1.9 *Nos damos un conjunto X de 10 números distintos comprendidos entre 10 y 99. Demostrar que hay dos subconjuntos distintos de X tales que la suma de los elementos de los dos subconjuntos dan el mismo resultado.*

5.1.10 *En un círculo de radio 1 se marcan varias cuerdas, de manera que cada diámetro no interseca a más de 4 de esas cuerdas. Probar que la suma de las longitudes es a lo sumo 13.*

5.1.11 *Se dan 25 puntos en el plano. Se sabe que dados cualesquiera tres de ellos, hay dos a distancia ≤ 1. Probar que hay 13 que están dentro de un círculo de radio 1.*

5.1.12 *Se distribuyen al azar 51 puntos en un cuadrado de 1 metro de lado. Verificar que hay 3 de esos puntos que se pueden cubrir con un cuadrado de lado 20 cm.*

5.1.13 *Hay 100 personas sentadas en una mesa circular, y al menos 51 de ellas son hombres. Verificar que hay dos hombres sentados en posiciones diametralmente opuestas de la mesa.*

5.1.14 *Probar que hay una potencia de 3 cuya expresión decimal termina en* 001*.*

5.1.15 *Se colorea el plano con 2 colores. Probar que hay dos puntos a distancia 1 con el mismo color.*

5.1.16 *Se colorea la recta con 2 colores. Demostrar que hay un segmento de longitud no nula tal que el centro y los extremos tienen el mismo color.*

5.1.17 *En el retículo infinito cuadrado $\mathbb{Z}^2$ (el conjunto de los puntos del plano con coordenadas enteras) se escogen 5 puntos. Probar que el punto medio de uno de los segmentos que determinan esos 5 puntos es también un punto del retículo.*

5.1.18 *Los registros de una matriz* 3×3 *son los números* 0, 1 *y* -1. *Probar que entre las 8 sumas que se obtienen por filas, columnas y diagonales hay dos iguales.*

5.1.19 *Los registros de una matriz* 10×10 *son números enteros. Diremos que dos registros son vecinos si tienen un lado en común. Supongamos que los registros vecinos se diferencian en, a lo sumo, 5. Probar que, entonces, dos de esos registros han de ser iguales.*

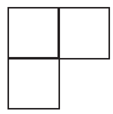
5.1.20 *Se colorea una recta con 23 colores distintos. Verificar que podemos encontrar 2 puntos sobre la recta con el mismo color y que distan un número entero de metros.*

5.1.21 *Se trazan 7 rectas en el plano, de manera que no hay dos que sean paralelas. Probar que hay dos que forman un ángulo menor que* 26 *grados.*

5.1.22 *Se colorean los puntos del plano con alguno de una paleta de 100 colores. Probar que podemos encontrar un rectángulo cuyos vértices lleven todos el mismo color.*

5.1.23 *Se dan 6 puntos en un rectángulo* 3×4. *Demostrar que hay dos de esos puntos que están a distancia* $\leq \sqrt{5}$.

5.1.24 *En un segmento* I *de longitud 10, inicialmente blanco, se han marcado 10 segmentos disjuntos con color rojo. Si no hay dos puntos en* I *a distancia 1 y ambos de color rojo, probar que la suma de las longitudes de los intervalos es, a lo sumo, cinco.*



5.1.25 *Llamamos un* ***trominó*** *a una configuración de tres casillas como las de la figura de la derecha. ¿Cuál es el número máximo de casillas de un tablero* 8×8 *que se pueden colorear de rojo de manera que algún trominó (y sus giros) no es del todo rojo?*

5.1.26 *¿Cuál es el mínimo número de casillas de un tablero* 8×8 *que se pueden colorear de rojo de manera que en cualquier trominó haya al menos una casilla roja?*

5.1.27 *OJO CON ÉSTOS Se dispone de 100 tarjetas, numeradas del 100 al 999. El valor de cada tarjeta es la suma de los dígitos que aparecen en ella (los posibles valores de estas sumas van de 1 a 27). ¿Cuál es el número mínimo de tarjetas que hay que extraer para asegurar que haya tres con el mismo valor?*

Sugerencia. Obsérvese que una aplicación directa del principio del palomar daría una respuesta de 55. !Pero la respuesta correcta es 53!

5.1.28 *Intentemos generalizar el ejercicio anterior. Se dispone de* n *objetos para distribuir en* k *cajas, de manera que no pueden ir más de* $t_1,\dots,t_k$ *objetos a las respectivas cajas* $1,\dots,k$. *¿Cuál será el valor mínimo que ha de tener* n *para asegurar que hay al menos una caja con* r *objetos?*