FSI CONJUNTOS DIFUSOS Y LÓGICA DIFUSA

Indice

INTRODUCCION

Los conjuntos difusos fueron introducidos por L.A. Zadeh en 1965 para procesar/manipular información y datos afectados de incertidumbre/imprecisón no probabilística.

- . L.A.Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 8(1965) 338-353.

Fueron diseñados para representar matemáticamente incertidumbre y vaguedad y proporcionar herramientas formalizadas para trabajar con la imprecisión intrínseca en muchos problemas.

No obstante la historia de la Lógica Difusa comienza mucho antes...

Realmente hay que remontarse a Aristóteles quien introdujo las denominadas LEYES DEL PENSAMIENTO, COMO BASE PARA DESARROLLAR UNA Teoría concisa de la Lógica y posteriormente las Matemáticas.

LA LEY DEL TERCERO EXCLUIDO

Esta "ley básica del pensamiento" establece que cualquier proposición solo puede ser Verdadera o Falsa y que ningún otro valor de verdad intermedio está permitido.

Incluso cuando Parminedes (300 aC) propuso la primera versión de esta ley ya encontró serias e inmediatas objeciones.

Heraclito propuso cosas que podían ser simultáneamente ciertas y falsas.

Seria Platón quien pusiera la "primera piedra" de la Lógica Difusa indicando que "hay una tercera región entre lo verdadero y lo falso donde los opuestos se presentan juntos"

LA LOGIA TRIVALUADA DE LUKASIEWICZ

La primera formulación sistemática de una alternativa a la lógica bivaluada de Aristóteles fue formulada por J. Lukasiewicz entre 1917 y 1920.

Este autor introdujo un tercer valor de verdad, que podriamos describir con el término “posible” y formuló consecuentemente una lógica trivaluada .

Lukasiewicz asignó un valor numérico entre 0 y 1 al termino posible y construyo las matemáticas correspondientes a esa lógica trivaluada.

Adicionalmente Lukasiewicz propuso una notación completa y un sistema axiomático a partir del cual esperaba derivar “matemastica moderna”.

OTRAS LOGICAS POLIVALORADAS

Lukasiewicz exploró posteriormente la posibilidad de manejar lógicas con cuatro, cinco, ... valores de verdad, llegando a la conclusión de que no existía impedimento formal para la derivación de una lógica infinito-valorada.

Esta lógica seria completamente formalizada hacia 1930.

Lukasiewicz consideraba que la lógica trivalorada y la infinito- eran las más interesantes desde el punto de vista de sus propiedades, si bien la tetravalorada era la más fácilmente adaptable a los postulados aristotélicos clásicos.

Hay que mencionar que D.E. también ha propuesto en 1968-1973 una lógica de tres valores similar a la de Lukasiewicz.
Knuth argumentaba que su lógica permitia un desarrollo de las matemática mas elegante que el de la lógica bivaluada.

LOS CONJUNTOS DIFUSOS (Fuzzy Sets)

La palabra fuzzy es un termino fotográfico que alude a la condición de movido o borroso en el sentido de imágenes con los contornos mal definidos. De ahí la traducción de Difuso o Borroso que empleamos en castellano

En 1965 L.A. Zadeh introduce una lógica infinito valorada caracterizando el concepto de CONJUNTO DIFUSO y por extensión la LOGICA DIFUSA.

La idea de Zadeh es hacer que el rango de valores de pertenencia de un elemento a un conjunto pueda variar en el intervalo [0,1] en lugar de limitarse a uno de los valores del par {0,1} (o lo que es lo mismo Falso, Verdadero).

A continuación Zadeh extiende los operadores conjuntistas clásicos (operadores lógicos) a la nueva formulación, probando que la formulación así obtenida extiende la lógica (Teoria de Conjuntos) clásica.

A partir de la Teoria de Conjuntos Difusos (borrosos) Zadeh introduce la Lógica Difusa como una extensión de las lógicas polivaloradas.

Lo que justifica el desarrollo de la Lógica difusa es la necesidad de un marco conceptual donde tratar la incertidumbre no probabilística y la imprecisión léxica.

En palabras de Zadeh (1992), las características más notables de la Lógica difusa son:

- En Lógica Difusa (LD) todo es cuestión de grado
- El Razonamiento Exacto es un caso limite del Razonamiento Aproximado.
- En LD el conocimiento se interpreta como una colección de restricciones elásticas (difusas) sobre un conjunto de variables.
- En LD la inferencia puede verse como la propagación de un conjunto de restricciones elásticas.

- Sistema Difuso (SD): resultado de la "fuzzificacion" de un sistema convencional

- Los Sistemas Difusos operan con conjuntos difusos en lugar de números.

- En esencia la representación de la información en Sistemas Difusos imita el mecanismo de Razonamiento Aproximado que realiza la mente humana.

ALGUNAS DEFICIONES BASICAS

Sea X un conjunto no vacío de objetos que consideraremos como Referencial o Universo de discurso

Definición: Un conjunto difuso A sobre X es un conjunto de pares de valores $\{(x,r), x \in X, r \in [0,1]\}$.

Cada elemento $x \in X$ con su grado de pertenencia a A.

Por extensión de la idea clásica de función característica se suele asociar cada conjunto difuso A con una Función de Pertenencia que enlaza o empareja los elementos de X con elementos del intervalo [0,1]:

Caracterización. (fuzzy set) Un conjunto difuso se caracteriza por una función

$$\mu A : X \,.\, [0, 1]$$

tal que $\mu A(x)$ se interpreta como el grado de pertenencia a A de cada $x \in X$.

Normalmente se escribe se escribe $A(x)$ en lugar de $\mu A(x)$ o lo que es lo mismo $A = \{ A(x)/x,\ x \in X\}$.

Los valores de pertenencia varían entre 0 (no pertenece en absoluto) y 1 (pertenencia total).

Los conjuntos clásicos son un caso particular de conjunto difuso con función de pertenencia (función característica) con valores en {0,1}.

Si $X = \{x1, . . . , xn\}$ es un conjunto finito y A es un subconjunto difuso de X, a veces se usa la notación

$$A = \mu 1/x1 + \cdot \cdot \cdot + \mu n/xn$$

CARACTERÍSTICAS DE UN CONJUNTO DIFUSO

• Altura de un Conjunto Difuso (height): El mayor valor de su función de pertenencia: sup{A(x) $x \in X$}.

• Conjunto Difuso Normalizado (normal): Aquel para el que existe un elemento que pertenece al conjunto difuso totalmente, es decir, con grado 1. Dicho de otro modo Altura(A) = 1.

• Soporte de un Conjunto Difuso (support): Elementos de X que pertenecen a A con grado mayor a 0: Soporte(A) = $\{x \in X \mid A(x) > 0\}$.

• Núcleo de un Conjunto Difuso (core): Elementos de X que
pertenecen al conjunto con grado 1: Nucleo(A) = $\{x \in X \mid A(x) = 1\}$.
Lógicamente, Nucleo(A) Í Soporte(A).

• α-Corte: Valores de X con grado de pertenencia minimo igual a α: $A\alpha = \{x \in X \mid \alpha \leq A(x)\}$.

• Conjunto Difuso Convexo o Concavo: Aquel cuya función de pertenencia cumple

Convexo: $A(\lambda x1 + (1-\lambda)x2) \quad \min\{A(x1), A(x2)\}$.

Concavo: $A(\lambda x1 + (1-\lambda)x2) \quad \max\{A(x1), A(x2)\}$

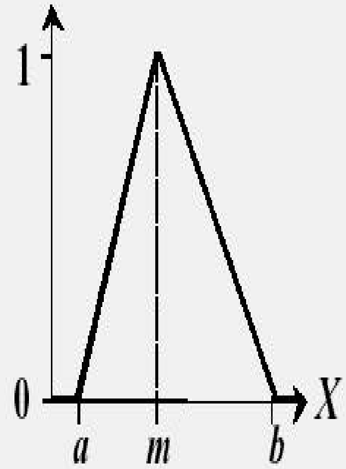
Para cualesquiera x1 y x2 de X y $\lambda \in [0,1]$.

• Cardinalidad de un Conjunto Difuso (Muy diversas definiciones)

Tipos de Funciones de Pertenencia

- **Función de Pertenencia**: $A: X \rightarrow [0,1]$
  - Cualquier función A es válida: Su definicion exacta depende del **concepto** a definir, del **contexto** al que se refiera, de la **aplicación**...
  - En general, es preferible usar **funciones simples**, debido a que simplifican muchos cálculos y no pierden exactitud, debido a que precisamente se está definiendo un concepto **difuso**.
- **Funciones de Pertenencia Típicas:**
  - **1. Triangular:** Definido por sus límites inferior a y superior b, y el valor modal m, tal que $a<m<b$.

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \le a \\ (x-a)/(m-a) & \textbf{si } x \in (a,m] \\ (b-x)/(b-m) & \textbf{si } x \in (m,b) \\ 0 & \textbf{si } x \ge b \end{cases}$$



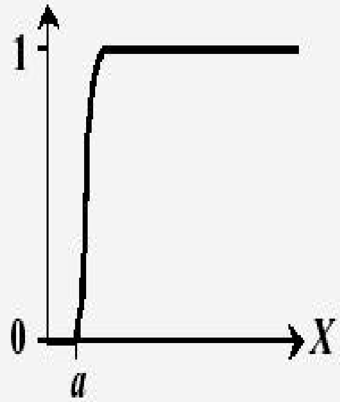
    - También puede representarse así:

$$A(x;a,m,b) = \text{máx} \{ \text{mín}\{ (x-a)/(m-a), (b-x)/(b-m) \}, 0 \}$$

Tipos de Funciones de Pertenencia

– **2. Función Γ** (*gamma*): Definida por su límite inferior a y el valor $k>0$.

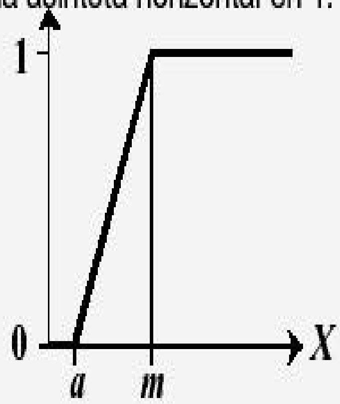
$$A(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le a\\ 1-e^{-k(x-a)^2} & \text{si } x>a\end{cases}$$



$$A(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le a\\ \dfrac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2} & \text{si } x>a\end{cases}$$

- Esta función se caracteriza por un rápido crecimiento a partir de a.
- Cuanto mayor es el valor de k, el crecimiento es más rápido aún.
- La primera definición tiene un crecimiento más rápido.
- Nunca toman el valor 1, aunque tienen una asíntota horizontal en 1.
- Se aproximan linealmente por:

$$A(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le a\\ (x-a)/(m-a) & \text{si } x\in(a,m)\\ 1 & \text{si } x\ge m\end{cases}$$

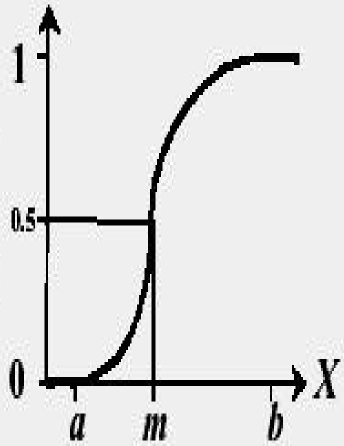


- La función opuesta se llama **Función L**.

Tipos de Funciones de Pertenencia

- **3. <u>Función S</u>:** Definida por sus límites inferior a y superior b, y el valor m, o punto de inflexión tal que $a<m<b$.
  - Un valor típico es: $m=(a+b)/2$.
  - El crecimiento es más lento cuanto mayor sea la distancia a-b.

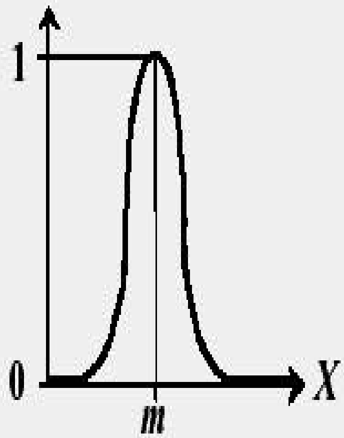
$$A(x)=\begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad x\le a \\ 2\,\{(x-a)/(b-a)\}^2 & \textbf{si} \quad x\in(a,m] \\ 1-2\,\{(x-b)/(b-a)\}^2 & \textbf{si} \quad x\in(m,b) \\ 1 & \textbf{si} \quad x\ge b \end{cases}$$



- **4. <u>Función Gausiana</u>:** Definida por su valor medio m y el valor $k>0$.

$$A(x)=e^{-k(x-m)^2}$$

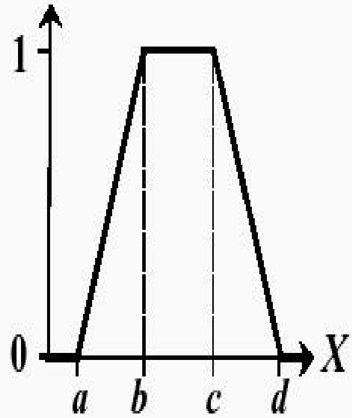
  - Es la típica campana de Gauss.
  - Cuanto mayor es k, más estrecha es la campana.



Tipos de Funciones de Pertenencia

– **5. Función Trapezoidal:** Definida por sus límites inferior a y superior d, y los límites de su soporte, b y c, inferior y superior respectivamente.

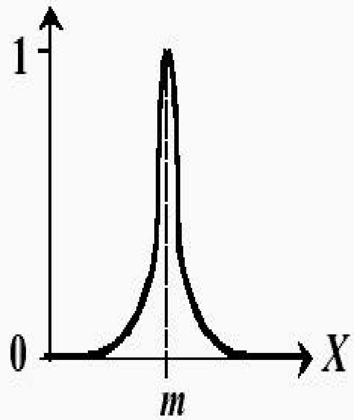
$$A(x)=\begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad (x \le a) \ \textbf{o} \ (x \ge d) \\ (x-a)/(b-a) & \textbf{si} \quad x \in (a,b] \\ 1 & \textbf{si} \quad x \in (b,c) \\ (d-x)/(d-c) & \textbf{si} \quad x \in (b,d) \end{cases}$$



– **6. Función Pseudo-Exponencial:** Definida por su valor medio m y el valor k>1.

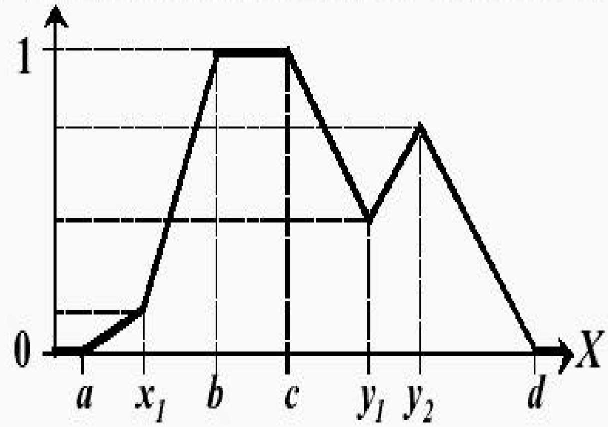
$$A(x)=\frac{1}{1+k(x-m)^2}$$

- Cuanto mayor es el valor de k, el crecimiento es más rápido aún y la "campana" es más estrecha.



Tipos de Funciones de Pertenencia

– **7. <u>Función Trapecio Extendido</u>:** Definida por los cuatro valores de un trapecio [*a, b, c, d*], y una lista de puntos entre ***a*** y ***b***, o entre ***c*** y ***d***, con su valor de pertenencia asociado a cada uno de esos puntos.



– En general, la función **Trapezoidal** se adapta bastante bien a la definición de cualquier concepto, con la ventaja de su fácil definición, representación y simplicidad de cálculos.

– En casos particulares, el **Trapecio Extendido** puede ser de gran utilidad. Éste permite gran expresividad aumentando su complejidad.

– En general, usar **una función más compleja no añade mayor precisión**, pues debemos recordar que se está definiendo un concepto **difuso**.

El Teorema de Representación

- **Teorema de Representación o Principio de Identidad**: Todo conj. difuso puede descomponerse en una familia de conjs. difusos.
  - Para ello, utilizaremos diversos **α-cortes**, teniendo en cuenta la **Restricción de Consistencia: Si α1>α2, entonces** $A_{\alpha 1} \subset A_{\alpha 2}$
  - Cualquier conjunto difuso A puede descomponerse en una serie de sus **α-cortes:** $A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$

    o, lo que es lo mismo: $\boxed{A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha A_\alpha(x)\}}$

    donde $A_\alpha(x) \in$ **{0,1}**, dependiendo de si x pertenece o no al α-corte A_α.
  - **Reconstrucción:** Cualquier conjunto difuso puede reconstruirse a partir de una familia de conjuntos α-cortes anidados.
  - **Conclusiones:**
    - Cualquier problema formulado en el marco de los conjuntos difusos puede resolverse transformando esos conjuntos difusos en su familia de α-cortes anidados, determinando la solución para cada uno usando técnicas no difusas.
    - Resalta que los conjuntos difusos son una generalización.

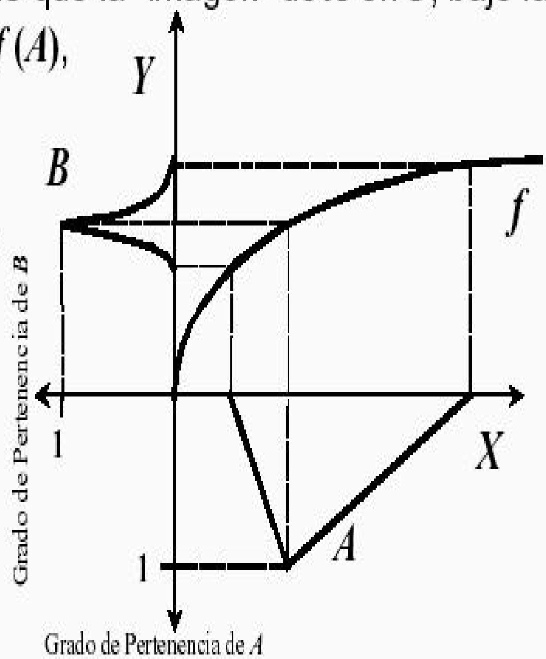
El Principio de Extensión

<u>Principio de Extensión</u> (*Extension Principle*)**:** Usado para transformar conjuntos difusos, que tengan iguales o distintos universos, según una función de transformación en esos universos.

- Sean X e Y dos conjuntos y f una función de transformación de uno en otro: $f: X \rightarrow Y$
- Sea A un conjunto difuso en X.
- El **Principio de Extensión** sostiene que la "imagen" de A en Y, bajo la función f es un conjunto difuso $B=f(A)$, definido como:

  $$B(y) = \sup\ \{ A(x)\ \mid x \in X, y = f(x) \}$$

- Ejemplo, representado gráficamente:
- La función $\sup$ se aplica si existen dos o más valores de x que tengan igual valor $f(x)$.
  - Ese caso no ocurre en el ejemplo.



El Principio de Extensión: Generalización

Se puede **generalizar el Principio de Extensión** para el caso en el que el Universo X sea el producto cartesiano de n Universos:

- $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$
- La función de transformación: $f: X \to Y$, $y = f(x)$, con $x = (x_1, x_2, ... , x_n$
- El **Principio de Extensión** transforma n Conjuntos Difusos $A_1, A_2, ...$ y A_n, de los universos $X_1, X_2, ...$ y X_n respectivamente, en un conjunto difuso $B=f(A_1, A_2, ... , A_n)$ en Y, definido como:

  $B(y) = \sup \{ \min[A_1(x_1), A_2(x_2), ... , A_n(x_n)] \mid x \in X, y=f(x) \}$

Ejemplos: Sean X e Y, ambos, el universo de los números naturales.

- Función **sumar 4:** $y = f(x) = x + 4$:
  - $A = 0.1/2 + 0.4/3 + 1/4 + 0.6/5$;
  - $B = f(A) = 0.1/6 + 0.4/7 + 1/8 + 0.6/9$;
- Función **suma:** $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$:
  - $A_1 = 0.1/2 + 0.4/3 + 1/4 + 0.6/5$;
  - $A_2 = 0.4/5 + 1/6$;
  - $B = f(A_1, A_2) = 0.1/7 + 0.4/8 + 0.4/9 + 1/10 + 0.6/11$;

Cálculo de la Función de Pertenencia

Las **Funciones de Pertenencia** pueden calcularse de diversas formas. El método a elegir depende de la aplicación en particular, del modo en que se manifieste la incertidumbre y en el que ésta sea medida durante los experimentos.

– 1. **Método HORIZONTAL:**
  - Se basa en las respuestas de un grupo de **N** "expertos".
  - La pregunta tiene el formato siguiente:
    "¿Puede x ser considerado compatible con el concepto A ?".
  - Sólo se acepta un "SÍ" o un "NO", de forma que:

$$A(x) = \textbf{(Respuestas Afirmativas) / N.}$$

– 2. **Método VERTICAL:**
  - Se escogen varios valores para α, para construir sus **α–cortes**.
  - Ahora la pregunta es la siguiente, efectuada para esos valores de α predeterminados: "¿Identifique los elementos de X que pertenecen a A con grado no menor que α ?".
  - A partir de esos **α–cortes** se identifica el conjunto difuso A (usando el llamado Principio de Identidad o Teorema de Representación).

Cálculo de la Función de Pertenencia

- **3. Método de Comparación de Parejas** (Saaty, 1980):
  - Suponemos que tenemos ya el conjunto difuso A, sobre el Universo X de n valores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
  - Calcular la **Matriz Recíproca M=[a$_{hi}$]**, matriz cuadrada $n \times n$:
    - a) Diagonal Ppal. es siempre 1.
    - b) Propiedad de Reciprocidad:

      $a_{hi}\, a_{ih} = 1$
    - c) Propiedad Transitiva:

      $a_{hi}\, a_{ik} = a_{hk}$
  - El proceso es el inverso:
    - Se calcula la matriz **M**.
    - Se calcula A a partir de **M**.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{A(x_1)}{A(x_1)} & \frac{A(x_1)}{A(x_2)} & \cdots & \frac{A(x_1)}{A(x_n)} \\ \frac{A(x_2)}{A(x_1)} & \frac{A(x_2)}{A(x_2)} & \ddots & \frac{A(x_2)}{A(x_n)} \\ \vdots & \ddots & \frac{A(x_i)}{A(x_j)} & \vdots \\ \frac{A(x_n)}{A(x_1)} & \frac{A(x_n)}{A(x_2)} & \cdots & \frac{A(x_n)}{A(x_n)} \end{bmatrix}$$

  - Para calcular **M**, se cuantifica numéricamente el nivel de prioridad o mayor pertenencia de una pareja de valores: x_i con respecto a x_j.
    - Número de comparaciones: $n(n-1)/2$;
    - La transitividad es difícil de conseguir (el autovalor más grande de la matriz sirve para medir la consistencia de los datos: Si es muy bajo, deberían repetirse los experimentos).

Cálculo de la Función de Pertenencia

- **4. Método basado en la Especificación del Problema**:
  - Requieren una función numérica que quiera ser aproximada.
  - El error se define como un conjunto difuso: Mide la calidad de la aproximación.
- **5. Método basado en la Optimización de Parámetros**:
  - La forma de un conjunto difuso A, depende de unos parámetros, denotados por el vector **p**: Representado por $A(x;\mathbf{p})$.
  - Obtenemos algunos resultados experimentales, en la forma de parejas (elemento, Grado de pertenencia): **(E_k, G_k)** con **k=1, 2, ..., N**.
  - El problema consiste en optimizar el vector **p**, por ejemplo minimizando el error cuadrático: $\min_{p} \sum_{k=1}^{N} [G_k - A(E_k;p)]^2$
- **6. Método basado en la Agrupación Difusa** (*Fuzzy Clustering*):
  - Se trata de agrupar los objetos del Universo en grupos (solapados) cuyos niveles de pertenencia a cada grupo son vistos como grados difusos.
  - Existen varios algoritmos de Fuzzy Clustering, pero el más aceptado es el algoritmo de “fuzzy isodata” (Bezdek, 1981).