

# Conjuntos y Sistemas Difusos (Lógica Difusa y Aplicaciones)

## 4. Números Difusos y Probabilidad



E.T.S.I. Informática

J. Galindo Gómez

### NÚMEROS DIFUSOS

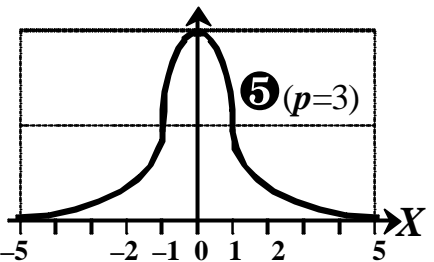
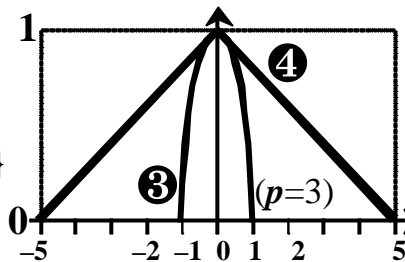
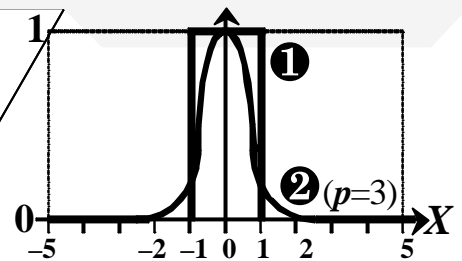
- **Números Difusos:** Expresan cantidades aproximadas.
  - Correspondencia entre  $\mathbf{R}$  (números reales) y el intervalo unidad:  $\mathbf{R} \hat{=} [0,1]$ , **Convexa** y preferentemente de **soporte acotado y normalizada**.
    - **Ejemplos:** aproximadamente 5, mucho más que 10...
    - Los cálculos con números difusos tienen su raíz en el análisis de intervalos (Moore, 1966) y han sido tratados por muchos autores: Dijkman y Haeringen, (1983), Dubois y Prade (1979, 1980, 1981), Kaufmann y Gupta (1988)...
- **Familia de funciones  $L$**  (Dubois, Prade, 1980): Funciones de pertenencia que satisfacen las siguientes propiedades:
  - **Simetría:**  $L(x) = L(-x)$ .
  - **Normalidad:**  $L(0) = 1$ .
  - **Convexidad:**  $L(x)$  es no creciente en el intervalo  $[0, \infty)$ .
- **Número Difuso LR  $A$ :** Construido usando dos funciones  $L, R \hat{=} L$ .
  - $L$  se aplica a la **izquierda** de  $A$  ( $x \leq m$ ) y  $R$  a la parte **derecha** ( $x > m$ ).
  - Denotaremos un número difuso **LR** como:  $A = (m, a, b)_{LR}$

$$A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{a}\right), & \text{si } x \leq m, a > 0 \\ R\left(\frac{x-m}{b}\right), & \text{si } x > m, b > 0 \end{cases} \quad \text{donde: } \begin{cases} m \text{ es el } \mathbf{Valor Modal} \text{ (modal value)} \\ a, b \text{ es la } \mathbf{Envergadura} \text{ (spread)} \\ \text{del número, a la izda. y} \\ \text{dcha. respectivamente.} \end{cases}$$

## NÚMEROS DIFUSOS LR

### Ejemplos de Funciones L:

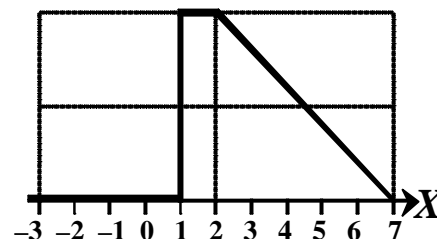
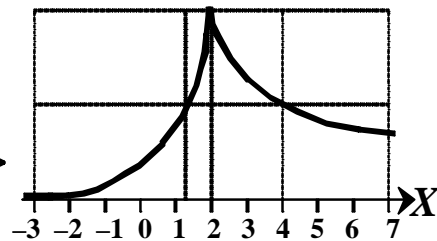
- ①  $L(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$
- ②  $L(x) = e^{-F}$ ,  $F = |x|^p$ ,  $p > 0$
- ③  $L(x) = \max\{0, 1 - |x|^p\}$
- ④  $L(x) = \max\{0, (5 - |x|)/5\}$
- ⑤  $L(x) = 1/(1 + |x|^p)$



### Ejemplos de Números Difusos LR:

- Si  $L$  es ② y  $R$  es ⑤, obtenemos:  $m=2$
- Si  $L$  es ①,  $R$  es ④, con  $m=2$ ,  $a=1$  y  $b=1$  obtenemos:

$$A(x) = \begin{cases} e^{-|(m-x)/a|^p}, & \text{si } x \leq m \\ \frac{1}{1+|(x-m)/b|^p}, & \text{si } x > m \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} a=1 \\ b=2 \\ p=1 \end{matrix} \right\}$$



3

## OPERACIONES con Números Difusos

- **Operaciones Aritméticas:** Se basan en el Principio de Extensión (Mizumoto, Tanaka, 1976), que transforma una operación  $f$  definida sobre dos elementos del Universo  $U$  (i.e., en  $U \times U$ ), en otra operación  $F$  definida sobre dos conjuntos difusos de  $U$ .
  - Si  $U$  es la recta real  $R$  y tenemos dos números difusos  $A$  y  $B$ , entonces, obtenemos el número difuso  $C$ :  $C = F(A, B)$
  - La función  $F$  es la función inducida por  $f$ , tal que:  $F(\{x\}, \{y\}) = f(x, y)$ .
  - Por el **Principio de Extensión** obtenemos que el número difuso resultante se calcula como:  $C(z) = \sup_{x,y \in R: z=f(x,y)} \{A(x) \wedge B(y)\}$
  - **Resultado: Es otro número difuso.**
    - Está normalizado, ya que  $A$  y  $B$  lo están.
    - Tiene su soporte limitado (igual que  $A$  y  $B$ ).
    - Para cualesquiera valores  $a$  y  $b$ , tales que  $A(a)=1$  y  $B(b)=1$ :
      - Es **no creciente** en el intervalo  $[f(a, b), +\infty]$ .
      - Es **no decreciente** en el intervalo  $[-\infty, f(a, b)]$ .
- Los **números difusos triangulares** simplifican algunos cálculos.
  - **Ejemplo:** Suma de triángulos:  $(a, m, b) + (c, n, d) = (a+c, m+n, b+d)$ .

4

## Fórmulas para Números Difusos LR

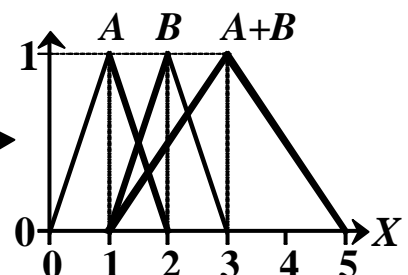
$$\begin{aligned} A > 0 &\hat{=} A(x) = 0, \text{ " } x < 0. \\ A < 0 &\hat{=} A(x) = 0, \text{ " } x > 0. \end{aligned}$$

- **Fórmulas Generales para Números Difusos LR:** (Dubois, Prade, 1980), Sean 2 números difusos LR generales  $M=(m, a, b)_{LR}$ ,  $N=(n, g, d)_{LR}$ 
  - **Suma:**  $(m, a, b)_{LR} + (n, g, d)_{LR} = (m + n, a+g, b+d)_{LR}$
  - **Resta:**  $(m, a, b)_{LR} - (n, g, d)_{LR} = (m - n, a+d, b+g)_{LR}$
  - **Opuesto:**  $-(m, a, b)_{LR} = (-m, b, a)_{RL}$  (Funciones LR cambiadas)
  - **Multiplicación y División:** Estas fórmulas son “aproximadas” y bajo la suposición de que la envergadura de los argumentos (a, b) es pequeña en comparación al valor modal (m) de los números difusos:
    - $M > 0, N > 0$ :  $(m, a, b)_{LR} \cdot (n, g, d)_{LR} \approx (m n, m g + n a, m d + n b)_{LR}$
    - $M > 0, N < 0$ :  $(m, a, b)_{LR} \cdot (n, g, d)_{LR} \approx (m n, m a - n d, m b - n g)_{LR}$
    - $M < 0, N > 0$ :  $(m, a, b)_{LR} \cdot (n, g, d)_{LR} \approx (m n, n a - m d, n b - m g)_{LR}$
    - $M < 0, N < 0$ :  $(m, a, b)_{LR} \cdot (n, g, d)_{LR} \approx (m n, -n b - m d, -n a - m g)_{RL}$
    - **Multiplicación por un escalar a:** (fórmulas exactas)
      - $a > 0$ :  $a(m, a, b)_{LR} = (a m, a a, a b)_{LR}$
      - $a < 0$ :  $a(m, a, b)_{LR} = (a m, -a b, -a a)_{RL}$  (Funciones LR cambiadas)
    - **División:**  $(m, a, b)_{LR} / (n, g, d)_{LR} \approx (m/n, (dm + an)/n^2, (gm + bn)/n^2)_{LR}$

5

## Crecimiento del Difuminado

- Cuando se efectúa un cálculo con números difusos, **el resultado es Más Difuso** de lo que lo eran los operandos (tiene menos especificidad).
  - Es similar a la acumulación de errores de redondeo en cálculos *crisp*.
  - **Ejemplo:** Sumemos varias veces el triángulo  $A=(0, 1, 2)$  al valor 1, singleton o triángulo  $(1, 1, 1)$ :
    - $B = A + 1 = (1, 2, 3)$ ;
    - $C = A + B = (0, 1, 2) + (1, 2, 3) = (1, 3, 5)$ ;
    - $D = A + C = (0, 1, 2) + (1, 3, 5) = (1, 4, 7)$ ;
    - $E = A + D = (0, 1, 2) + (1, 4, 7) = (1, 5, 9)$ ;
  - Observe que **el soporte crece sucesivamente** bastante rápido.
    - En la suma, el **límite inferior** permanece fijo (1). El **límite superior** se incrementa en 2 cada vez (2 es el tamaño del soporte de A).
  - Si es posible se debe **reducir la cadena de cálculos** sucesivos, para que los resultados sean significativos.
  - ¿Cómo crece el difuminado en una **sucesión de Fibonacci difusa**?



6

## Crecimiento del Difuminado: Ejemplos

- **Restar sucesivamente** el triángulo  $A = (0.8, 1, 1.2)$  al valor **10**:
  - $B = 10 - A = (8.8, 9, 9.2)$ ; (Tamaño del Soporte = 0.4)
  - $C = B - A = (8.8, 9, 9.2) - (0.8, 1, 1.2) = (7.6, 8, 8.4)$ ; (T.S. = 0.8)
  - $D = C - A = (7.6, 8, 8.4) - (0.8, 1, 1.2) = (6.4, 7, 7.6)$ ; (T.S. = 1.2)
  - $E = D - A = (6.4, 7, 7.6) - (0.8, 1, 1.2) = (5.2, 6, 6.8)$ ; (T.S. = 1.6)
  - **El soporte crece también sucesivamente** bastante rápido.
- **Media** de 2 números difusos triangulares (1, 3, 5) y (2, 4, 6):
  - **Suma**:  $(1, 3, 5) + (2, 4, 6) = (3, 7, 11)$ ; (T.S. =  $4 + 4 = 8$ )
  - **Multiplicación por el escalar 1/2**: (T.S. es la mitad: 4)  
 $0.5(3, 7, 11) = (0.5 \cdot 7, 0.5, 0.5)_{LR} = (1.5, 3.5, 5.5)$ ;
    - Al multiplicar por un escalar  $a$  en el intervalo (0,1), se reduce el tamaño del soporte en una proporción que depende del valor  $a$ , siguiendo la ecuación:  $a(m, a, b)_{LR} = (am, a, a b)_{LR}$
- **Media** de N números difusos triangulares “iguales”: (1, 2, 3);
  - **N=2**:  $(1/2)(2, 4, 6) = (0.5 \cdot 4, 0.5, 0.5)_{LR} = (1, 2, 3)$ ;
  - **N=3**:  $(1/3)(3, 6, 9) = (1/3 \cdot 4, 1/3, 1/3)_{LR} = (1, 2, 3)$ ;

7

## Conjuntos Difusos y Probabilidad

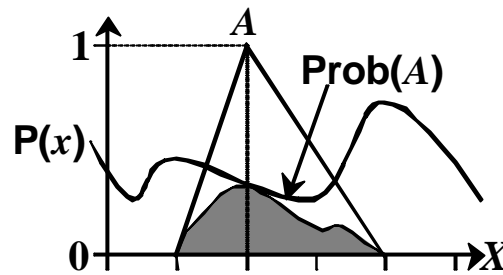
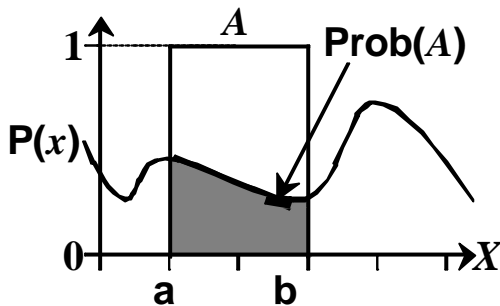
- **Conjuntos Difusos y Probabilidad** (Dubois, Prade, 1994) son dos herramientas complementarias (no contrarias) y existen sistemas que utilizan ambas herramientas.
  - **Probabilidad**: Se refiere a la **ocurrencia de ciertos eventos bien definidos**, dentro de un conjunto claro de posibilidades. Probabilidad de un evento **A** es:  **$P(A) = \text{Eventos}_A / \text{Eventos\_Posibles}$** ;
    - **Ejemplo**: Coger una bola negra de una urna en la que hay 3 negras y 7 blancas: Probabilidad =  $3/10 = 0.3$ .
    - Puede calcularse la probabilidad basándose en los resultados de **repetir un experimento** suficientes veces:  **$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n_A/n)$** ;
      - donde  $n_A$  es el número de experimentos en los que ocurrió el evento **A** y  $n$  es el número total de experimentos realizados.
  - **Conjuntos Difusos**: Tratan conceptos de límites poco claros, midiendo el “**grado**” con el que se cumple cierto concepto (o evento). No tratan los resultados de la repetición de experimentos.
    - Tras un experimento determinado la incertidumbre que refleja la probabilidad se desvanece, pues conocemos el resultado de ese experimento. Sin embargo, los conceptos difusos manejados en ese experimento siguen siendo válidos tras ese experimento.

8

## Probabilidad de Eventos Difusos

- Sea  $X$  un evento (o experimento) con cierta probabilidad  $P(x)$   
"  $x \in X$  (denotamos también por  $X$  el conjunto de valores posibles en el experimento), y sea  $A$  un conjunto difuso definido en  $X$  :
- Probabilidad de que el evento  $X$  sea  $A$ : (Zadeh, 1968)

$$\text{Prob}(X \text{ sea } A) = \int_X A(x)P(x)dx \rightarrow \text{tiene que ser } \leq 1, \text{ ya que } \int_X P(x)dx = 1$$

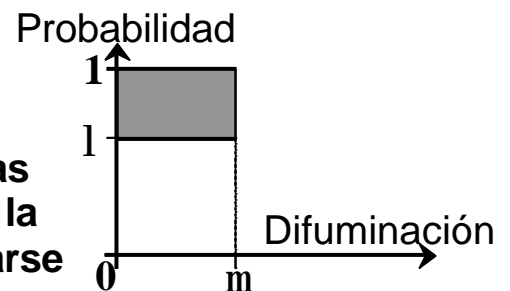


- El conjunto difuso  $A$  juega el papel de función de ponderación.
  - Si  $A$  es un conjunto no difuso  $[a, b]$ :  $\text{Prob}(X \text{ sea } A) = \int_a^b P(x) dx$
- Si el conjunto difuso “crece” entonces la probabilidad de que ocurra también será mayor:
  - $A \subseteq B \Rightarrow \text{Prob}(X \text{ sea } A) \leq \text{Prob}(X \text{ sea } B)$

9

## Probabilidad de Eventos Difusos

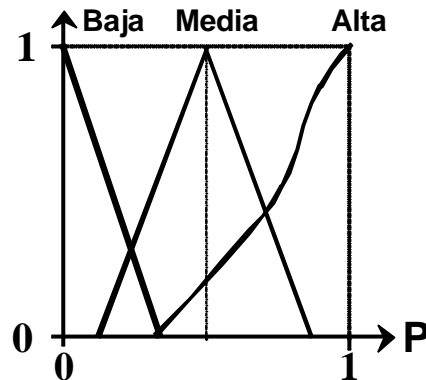
- La expresión  $\text{Prob}(X \text{ sea } A)$ , probabilidad de que el evento  $X$  sea  $A$ , deberían cumplir 2 requisitos importantes:
  - 1. La etiqueta lingüística  $A$  debería ser suficientemente específica dentro del universo  $X$ :  $\frac{\int_X A(x) dx}{\text{Card}(X)} \leq m$
  - 2. Esa probabilidad debe ser suficientemente grande para que la sentencia tenga suficiente sentido:  $\text{Prob}(X \text{ sea } A) \geq l$
- Son requisitos contradictorios:  
Si la etiqueta  $A$  es muy específica, esto hace que  $\text{Prob}(X \text{ sea } A)$  sea pequeña.
  - Por eso, la región de posibles sentencias cuantificadas lingüísticamente (usando la etiqueta lingüística  $A$ ) puede representarse de la forma expresada a la derecha:
- Otros valores (Zadeh, 1968):
  - Valor esperado de  $A$  (media):  $m_A = \int_X xA(x) P(x) dx$
  - Varianza de  $A$ :  $s_A^2 = \int_X [A(x) - m_A]^2 P(x) dx$



10

## Probabilidades Lingüísticas

- Las probabilidades son valores numéricos originalmente.
- Sin embargo, muchas veces se emplean Términos Lingüísticos para tratar probabilidades: “alta” probabilidad, “muy baja”, “media”...



- Esas Probabilidades Lingüísticas son conjuntos difusos y, por tanto, las operaciones que se efectúen con estas probabilidades darán como resultado otro conjunto difuso.

11

## Probabilidad y Posibilidad

- Principio de Consistencia** (*Consistency Principle*, Zadeh, 1978):
  - Lo que es POSIBLE puede NO ser PROBABLE.
  - Lo que es IMPROBABLE necesita ser POSIBLE.
- En otras palabras: El Grado de Posibilidad (o pertenencia) de cada elemento tiene que ser Mayor o Igual a su Probabilidad.
- Supongamos un universo finito  $X$  con  $n$  elementos para los que conocemos sus probabilidades  $p_i$ , tal que  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ;
  - El grado de pertenencia  $m_i$  de cada elemento se calcula de la siguiente forma (Dubois, Prade, 1983):  $m_i = \sum_{j=1}^n \min\{p_i, p_j\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 
    - El conjunto difuso inducido está normalizado, ya que alcanza el valor 1 para el elemento con mayor probabilidad.
- La transformación inversa, hallar la función de probabilidad inferida por cierta función de pertenencia, se puede calcular por:
 
$$p_i = \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} (m_j - m_{j+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$
  - donde los grados están ordenados:  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq m_{n+1} = 0$ .

12

## Probabilidad y Posibilidad: Ejemplos

- **Ejemplo:** Sea un universo de 5 elementos  $X=\{a,b,c,d,e\}$ , cuyas probabilidades son respectivamente: 0.6, 0.05, 0.2, 0.1 y 0.05.
  - Calcular los valores de pertenencia del conjunto  $A$  inducido por esas probabilidades:  $m_i = \sum_{j=1}^n \min\{p_i, p_j\}, i = 1, 2, \dots, n$ 
    - $m_A(a) = 0.6 + 0.05 + 0.2 + 0.1 + 0.05 = 1;$
    - $m_A(b) = 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.05 = 0.25;$
    - $m_A(c) = 0.2 + 0.05 + 0.2 + 0.1 + 0.05 = 0.6;$
    - $m_A(d) = 0.1 + 0.05 + 0.1 + 0.1 + 0.05 = 0.4;$
    - $m_A(e) = 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.05 = 0.25;$
  - Partiendo de  $A$  calcular su función de probabilidad:  $p_i = \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}(m_j - m_{j+1});$ 
    - $m_1=m_a=1 \supset m_2=m_c=0.6 \supset m_3=m_d=0.4 \supset m_4=m_b=0.25 \supset m_5=m_e=0.25 \supset m_6=0.$
    - $p_1 = p_a = 0.4/1 + 0.2/2 + 0.15/3 + 0/4 + 0.25/5 = 0.6;$
    - $p_2 = p_c = 0.2/2 + 0.15/3 + 0/4 + 0.25/5 = 0.2;$
    - $p_3 = p_d = 0.15/3 + 0/4 + 0.25/5 = 0.1;$
    - $p_4 = p_b = 0/4 + 0.25/5 = 0.05;$
    - $p_5 = p_e = 0.25/5 = 0.05;$

13

## Bibliografía

- J. Dijkman, H. Van Haeringen, S.I. De Lange, "Fuzzy Numbers". J. Math. Anal. And Applications, 92, pp. 301-341, 1983.
- D. Dubois, H. Prade, "Operations on Fuzzy Numbers". International Journal Systems Science, 9, pp. 613-626, 1979.
- D. Dubois, H. Prade, "Fuzzy Sets and Systems". Academic Press, New York, 1980.
- D. Dubois, H. Prade, "Additions of Interactive Fuzzy Numbers". IEEE Transactions on Automatic Control, 26, pp. 926-36, 1981.
- D. Dubois, H. Prade, "Unfair Coins and Necessity Measures: Toward a Possibilistic Interpretation of Histograms". Fuzzy Sets and Systems, 10, pp. 15-20, 1983.
- D. Dubois, H. Prade, "Fuzzy Sets: A Convenient Fiction for Modeling Vagueness and Possibility". IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2, pp. 6-21, 1994 (Este número está dedicado íntegramente a Conjuntos Difusos y Probabilidad).
- A. Kaufmann, M.M. Gupta, "Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science". North Holland, Amsterdam, 1988.
- R. Moore, "Interval Analysis". Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- M. Mizumoto, K. Tanaka, "The Four Operations of Arithmetic on Fuzzy Numbers". Systems, Computers, Controls, 7, pp. 73-81, 1976.
- L.A. Zadeh, "Probability Measures of Fuzzy Events". J. Math. Analysis and Applications, 22, pp. 421-427, 1968.
- L.A. Zadeh, "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility". Fuzzy Sets and Systems, 1, pp. 3-28, 1978.

14