



Conjuntos y Sistemas Difusos

(Lógica Difusa y Aplicaciones)

6. Lógica Difusa y Sistemas Basados en Reglas



E.T.S.I. Informática

J. Galindo Gómez

Razonamiento e Información

- **Razonamiento** (*reasoning*): Es la habilidad de inferir información sobre alguna faceta desconocida de un problema, a partir de la información disponible.
 - **Ejemplo:** Cuando un sistema falla, intentamos descubrir porqué ha fallado observando los síntomas.
 - En tareas de ingeniería es habitual tener que usar técnicas que requieren **razonamiento**: Resolución de problemas (*problem-solving*), toma de decisiones (*decision-making*)...
- **Información:** Puede venir dada en forma de Sentencias o **Proposiciones Atómicas** de la forma:

“X es A”

 - **donde**
 - X es el nombre de un objeto (atributo, hecho...).
 - A es el valor que toma ese objeto.
 - **Ejemplos:**
 - Perro es blanco.
 - 5 es impar.

Lógica o Cálculo Proposicional

- **Proposiciones Atómicas:**

- Pueden tomar **valores de verdad**, dentro de un conjunto definido de valores posibles.
- Esto implica la existencia de **distintas lógicas**, clasificadas por el número de valores de verdad posibles: Lógica bivaluada (*two-valued logic*), trivaluada (*three-valued logic*), ..., multivaluada (*many-valued logic*).
- Proposiciones con **atributos con imprecisión** conllevan el uso de **lógica multivaluada o lógica difusa** (*fuzzy logic*).

- **Cálculo Proposicional o Lógica Proposicional:**

- Permite proposiciones más complejas utilizando **Conectivos** y ciertas **reglas sintácticas** para conseguir “Proposiciones Bien Formadas” (*Well-Formed Propositions*).
- Si P y Q son proposiciones, entonces también son proposiciones:
 - Negación (NOT, \neg): $\neg P$
 - Conjunción (AND, \cap): $P \cap Q$
 - Disyunción (OR, \cup): $P \cup Q$
 - Implicación (SI-Entonces, \Rightarrow): $P \Rightarrow Q$
 - Doble Implicación (SI Y SÓLO SI, \Leftrightarrow): $P \Leftrightarrow Q$
 - Otros conectivos: XOR, NAND, NOR...

3

Lógica o Cálculo Proposicional

- **Interpretación:** Asigna un valor de verdad p a cada Prop. Atómica P .

- En **lógica clásica (bivaluada)**:

- Existen **dos valores de verdad** posibles:
 - P es VERDAD: $p = 1$.
 - P es FALSO : $p = 0$.
- Con n proposiciones atómicas distintas, existen 2^n interpretaciones posibles, que pueden mostrarse en una **Tabla de Verdad**.
- El **valor de verdad de una proposición compleja** se halla a partir de la verdad de sus proposiciones atómicas y según sus conectivos:

• $\neg P$: $1 - p$	(complemento)	$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \cup Q$ $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \cap (Q \Rightarrow P)$ $P \text{ XOR } Q \Leftrightarrow (\neg P \cap Q) \cup (P \cap \neg Q)$
• $P \cap Q$: $\min(p, q)$	(intersección)	
• $P \cup Q$: $\max(p, q)$	(unión)	

- **La teoría de conjuntos y la lógica bivaluada son isomorfismos matemáticos:** Todas las propiedades de un sistema tienen su equivalente en el otro sistema:

- Los valores de los atributos (A) pueden considerarse **conjuntos** con los elementos $x \in X$ que hagan verdad la proposición “ x es A ”.

- **Reglas de Inferencia:** A partir de un conj. de proposiciones hallar la verdad de otras.

- La regla más famosa es el **MODUS PONENS**: $\{P \Rightarrow Q, P\} \vdash Q$

4

Lógica de Predicados

- La **lógica proposicional** tiene algunos inconvenientes importantes para expresar conceptos cotidianos en lenguaje natural:
 - Carece de mecanismos para expresar relaciones entre objetos.
 - No permite generalizaciones sobre objetos similares.
- **Lógica de Predicados** (*Predicate Logic*): Mejora la Lógica Proposicional.
 - Usa **Predicados o Fórmulas Atómicas** (en vez de Proposiciones Atómicas):
 - **Un Átomo n-ario o Predicado Atómico n-ario**: Relaciona **n** elementos, indicando si la relación es cierta o falsa.
 - Si **n=1** tenemos una proposición.
 - Es una **Fórmula Bien Formada (FBF) o WFF** (*Well-Formed Formula*).
 - Permite usar **variables** que se mueven o toman valores dentro de cierto dominio. Las variables pueden ser *libres (free)* o *ligadas (bound)*.
 - También pueden usarse **constantes**.
 - **Ejemplos**:
 - Igual(x,y): Evalúa el valor de verdad de la expresión $x=y$.
 - Blanco(p): Evalúa el valor de verdad de la expresión “p es Blanco”.

5

Lógica de Predicados

- **Fórmulas Bien Formadas o WFF**: Se construyen así:
 - Un **átomo** es una WFF con todas sus ocurrencias de variables libres.
 - Si y_1 y y_2 son WFF's, entonces también son WFF's si usamos **conectivos** y sus ocurrencias de variables son libres o ligadas según sean libres o ligadas en esas subfórmulas: $\neg y$, $(y_1 \cup y_2)$, $(y_1 \cap y_2)$, $(y_1 \oplus y_2)$, $(y_1 \ll y_2)$...
 - Si y es una WFF y x es una variable que aparece como libre en y , entonces también son WFF's si usamos **cuantificadores** y donde la variable x aparece como ligada:
 - **Cuantificador Existencial**: $\exists x (y)$
 - **Cuantificador Universal**: $\forall x (y)$
 - Pueden usarse paréntesis para alterar o aclarar la precedencia.
- **Interpretación**: Asigna un valor concreto a cada *variable libre* de una WFF, evaluando entonces la verdad de cada predicado.
- **Regla de Inferencia MODUS PONENS**:
$$\{ P(a), \forall x (P(x) \oplus Q(x)) \} \vdash Q(a)$$

6

Lógica Multivaluada (Many-valued Logic)

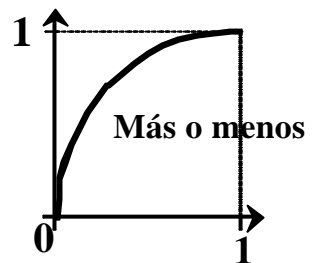
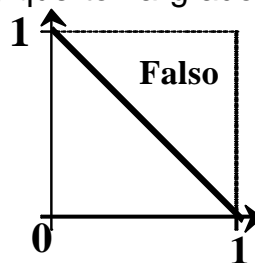
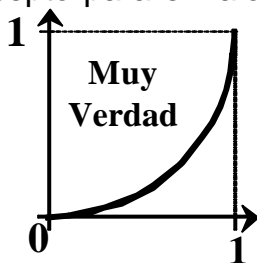
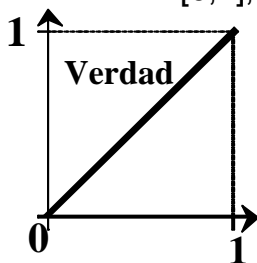
- Se puede **extender la lógica de predicados** para que la verdad no sea sólo cierta (1) o falsa (0), sino que tome un conjunto de valores en el intervalo $[0,1]$.
- **J. Lukasiewicz** (1920) sugirió una **lógica tri-valuada** L_3 usando el valor $1/2$ para expresar que **ignoramos la verdad** de un predicado (valor *unknown*):
 - Las operaciones básicas son definidas como:
 - $\neg P$: $1 - p$
 - $P \dot{\cup} Q$: $\min(p, q)$
 - $P \dot{\cup} Q$: $\max(p, q)$
 - $P \circledast Q$: $\min(1, 1 - p + q)$
 - Esta definición es equivalente para la **lógica bivaluada** L_2 .
- **Lógica n-valuada** L_n : n valores $\{0, 1/(n-1), 2/(n-1), \dots, (n-2)/(n-1), 1\}$
- **Lógica incontable-valuada** L_{\aleph} : Es la base de la lógica difusa, que puede tomar infinitos valores en el intervalo $[0,1]$, (Rescher, 1969; Rasiowa, 1992; Epstein, 1993; Muzio, Wesselkamper, 1986; Zadeh, 1988). 7

Lógica Difusa (Fuzzy Logic)

- La **Lógica Difusa** es una generalización de la lógica multivaluada.
- Permite utilizar **conceptos “aproximados”**, por lo que el **razonamiento** también será “aproximado”.
- En **Lógica Difusa** todo es cuestión de **GRADO**, incluso la **verdad** (Zadeh, 1975 y 1988): Un **Grado de Verdad** puede ser:
 - **Un Valor Numérico del intervalo $[0,1]$** . Ejemplos: 0.5, 0.75...
 - **Una Etiqueta Lingüística**. Ejemplos: más o menos verdad, bastante...
- **Resumiendo, un grado de verdad es un conjunto difuso.**
- Con estas bases, han surgido trabajos en diversas líneas:
 - Puede verse la lógica difusa como un lenguaje de primer orden con una semántica especial (Novak, 1992).
 - Puede verse la lógica difusa como una herramienta para la resolución de problemas y la toma de decisiones (Zadeh, 1975 y 1979; Tsukamoto, 1979; Pedrycz, 1995).
- **Cálculos con Lógica Difusa**: Utilizan la inferencia lógica aplicada a los conjuntos difusos de los grados de verdad.

Cálculos con Lógica Difusa

- **Formato de Proposiciones Atómicas:** “X es A_i ” es t_i
 - donde A_i es un conjunto difuso en el universo de X, y t_i es un conjunto difuso en el intervalo [0,1] (o su etiqueta lingüística).
 - **Ejemplos:**
 - “El Perro es Blanco” es muy cierto.
 - “La Temperatura es Alta” es bastante falso.
- **Cualificación de Verdad** (*Truth Qualification*, Zadeh, 1975): Obtener un conjunto difuso A tal que: “X es A_i ” es $t_i =$ “X es A”
 - El t_i actúa como una restricción elástica: $A(x) = t_i(A_i(x))$, " $x \hat{I} X$ "
 - $A(x) = \text{Verdad}(A_i(x)) = A_i(x)$; $A(x) = \text{Muy_Verdad}(A_i(x)) = A_i^2(x)$;
 - $A(x) = \text{Falso}(A_i(x)) = 1 - A_i(x)$; $A(x) = \text{Más_o_Menos}(A_i(x)) = A_i^{0.5}(x)$;
 - Si $t_i \neq \text{Falso}$, se está afirmando el hecho contrario. Por eso, podemos definir $t_i = \text{Totalmente_Falso}$ que toma el grado 0 en todo su universo [0,1], excepto para el valor 0, que toma grado 1.



9

Cálculos con Lógica Difusa

- **Cualificación de Verdad Inversa** (*Inverse Truth Qualification*): Obtener el conjunto difuso t_i partiendo de los conjuntos A y A_i .
 - La fórmula se basa en el principio de extensión:

$$t_i(v) = \sup_{x: A_i(x)=v} \{A(x)\};$$
- **Operaciones en Lógica Difusa:** Si tenemos dos proposiciones con dos grados de verdad t_A y t_B , deducimos que:
 - **AND Difuso:**

$$t_{A \wedge B}(v) = \sup_{w, z \in [0,1] : v = w \wedge z} \{t_A(w) \wedge t_B(z)\};$$
 - **OR Difuso:**

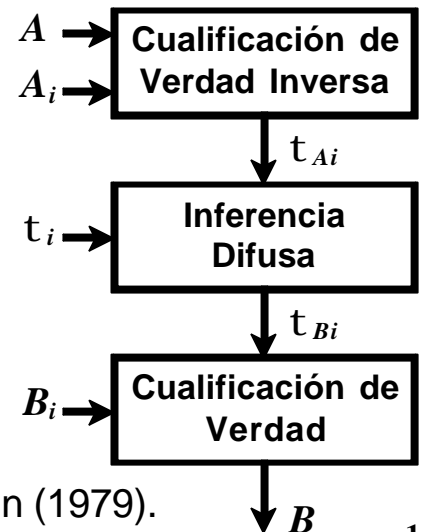
$$t_{A \vee B}(v) = \sup_{w, z \in [0,1] : v = w \vee z} \{t_A(w) \vee t_B(z)\};$$
 - **NOT Difuso:**

$$t_{\neg A}(v) = \sup_{u \in [0,1] : v = 1 - u} \{t_A(u)\} = t_A(1 - v);$$
 - **Implicación Difusa:**

$$t_{A \rightarrow B}(v) = \sup_{w, z \in [0,1] : v = w \rightarrow z} \{t_A(w) \wedge t_B(z)\};$$

Cálculos con Lógica Difusa

- **Razonamiento o Inferencia:** Utilizamos el Modus Ponens extendido: $\{A, A_i \circ B_i [\text{es } t_i]\} \vdash B$
 - donde $A_i \circ B_i$ es una **regla** que se cumple en el sistema (implicación) con el **grado de verdad** t_i (opcional), A es el **dato de entrada** (*input datum*) o situación actual y B es la **conclusión**: Si $A=A_i$, entonces $B=B_i$.
- Existen varios **Sistemas de Inferencia**: Veamos uno de forma muy breve (Tsukamoto, 1979; Pedrycz, 1995):
 - Si t_i es un valor de verdad lingüístico: **3 fases**:
 - **Cualificación de Verdad Inversa:** Obtener t_{Ai} como la compatibilidad de A_i respecto a A .
 - **Inferencia Lógica Difusa:** Usando la implicación difusa a partir del grado de verdad de la regla y del antecedente: t_{Bi} .
 - **Cualific. de Verdad:** Obtener B con B_i y el grado de inferencia t_{Bi} .
 - Otro sistema similar es el propuesto por Baldwin (1979).



11

Cálculos con Lógica Difusa

- **Regla Composicional de Inferencia** (*Compositional Rule of Inference*; Zadeh, 1973):. Tiene un solo paso que suele usar la t-norma del mínimo:

$$B(y) = \sup_{x \in X} \{A(x) \wedge I(A_i(x), B_i(y))\} = \sup_{x \in X} \{A(x) \mathbf{t} I(A_i(x), B_i(y))\};$$
 - donde: **t** es una **t-norma**: mínimo, producto, producto acotado ($\max\{0, x+y-1\}$)...
 - I es una **Función de Implicación**.
- **Funciones de Implicación:** $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, que cumple:
 - I es decreciente en la primera variable y creciente en la segunda.
 - Principio de Falsedad : $I(0, x) = 1, \forall x \in [0,1]$.
 - Principio de Verdad : $I(1, x) = x, \forall x \in [0,1]$.
 - Principio de Intercambio : $I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$.
- **Clasificación de las Implicaciones** (Trillas, 1985): Si **n** es una función de **negación**, **s** es una **s-norma** y **t** es una **t-norma**:
 - **S-implicaciones** : $I(x, y) = n(x) \mathbf{s} y$.
 - **R-implicaciones** : $I(x, y) = \sup_{c \in [0,1]} \{x \mathbf{t} c \mid c \leq y\}$.
 - **QM-implicaciones** : $I(x, y) = n(x) \mathbf{s} (x \mathbf{t} y)$.
 - **t-normas como funciones de implicación** (Gupta, Qi, 1991).

12

Cálculos con Lógica Difusa: $x \circledast y$

- **S-implicaciones:** $x \circledast y = (1 - x) \wedge y$
 - I. de Dienes (o Kleene) : $I(x, y) = \max(1 - x, y)$
 - I. de Mizumoto (o Reichenbach): $I(x, y) = 1 - x + xy$
 - Una modificación de ésta es la I. de Klir-Yuan: $I(x, y) = 1 - x + x^2y$
 - I. de Lukasiewicz (también es R): $I(x, y) = \min(1, 1 - x + y)$
 - Una modificación de ésta es: $I(x, y) = 1 - |x - y|$
- **R-implicaciones:** $x \circledast y = \sup\{z \in [0, 1] : x \wedge z \leq y\}$
 - I. de Gödel : $I(x, y) = \{1 \text{ si } x \leq y, y \text{ en otro caso}\}$
 - I. de Göguen : $I(x, y) = \{1 \text{ si } x \leq y, y/x \text{ en otro caso}\}$
 - I. de Rescher-Gaines : $I(x, y) = \{1 \text{ si } x \leq y, 0 \text{ en otro caso}\}$
- **QM-implicaciones:**
 - I. de Early-Zadeh: $I(x, y) = \max(1 - x, \min(x, y))$
- **Ejemplo:** Si usamos la t-norma del mínimo y la Implicación de Dienes, obtenemos que la **Regla Composicional de Inferencia** queda como: $B(y) = \sup_{x \in X} \min \{A(x), \max(1 - A_i(x), B_i(y))\}$

13

Sistemas Basados en Reglas (S.B.R.)

- **Reglas:** Son un modo de representar estrategias o técnicas apropiadas cuando el conocimiento proviene de la experiencia o de la intuición (careciendo de demostración matemática o física).
 - **Formato:** Son **Proposiciones que usan IF-THEN (SI-ENTONCES):**
IF <antecedente o condición> THEN <consecuente o conclusión>
 - El <antecedente> y el <consecuente> son **Proposiciones Difusas** que pueden formarse usando **conjunciones (AND)** o **disyunciones (OR)**: El significado, obviamente, depende de esto.
 - **Ejemplo:** SI la Temperatura es Alta **ENTONCES** Abrir la válvula Poco.
 - **Reglas Encadenadas:** Reglas en las que el consecuente de una de ellas es igual que el antecedente de la otra.
 - **Reglas Paralelas:** Si no son Encadenadas.
 - **Pasos para la Generación de Reglas:**
 - **Identificar las variables que intervienen** (Temperatura, Nivel de apertura de la válvula...) **y sus valores posibles:** Es normal que en las reglas se representen más los valores que las variables (Ej.: Si hace calor...).
 - **Identificar las restricciones que inducen las proposiciones.**
 - **Representar cada restricción con una relación difusa (regla).**

14

Sistemas Basados en Reglas (S.B.R.)

- **Proposiciones CUALIFICADAS** (*Qualified Propositions*): Añaden un grado (o etiqueta lingüística) a la proposición que forma una regla:
 - Grados de Certeza (verdad, falso, casi verdad...).
 - Grados de Probabilidad (Probable, poco probable, normalmente...).
 - Grados de Posibilidad (Posible, Poco Posible...).
- **Proposiciones CUANTIFICADAS** (*Quantified Propositions*): **Pueden usarse Cuantificadores Difusos: Muchos, Pocos, la Mayoría, Frecuentemente, Aproximadamente 8...**
 - **Ejemplos:**
 - La Mayoría de los Alumnos Listos son Ordenados.
 - Frecuentemente, Si la Temperatura es Alta, ENTONCES la Válvula está Poco Abierta.
 - **Reglas Cuantificadas en el Antecedente** (*Antecedent-Quantified*): Si se pone un cuantificador en el antecedente.
 - Ejemplo: Si se cumplen LA MITAD de las condiciones, ENTONCES...
- **Las características anteriores nos dan la siguiente clasificación:**
 - **Proposiciones CATEGÓRICAS** (*Categorical Propositions*): No contienen ni Cualificadores ni Cuantificadores.
 - **Proposiciones NO CATEGÓRICAS** (*Dispositional Propositions*): Proposiciones que no tienen que ser verdad SIEMPRE (Zadeh, 1989). 15

Sistemas Basados en Reglas (S.B.R.)

- **Reglas con EXCEPCIONES** (*Unless Rules*):
 - Ejemplo: Si se abre mucho la válvula, ENTONCES la Temperatura será Alta, EXCEPTO que haya Poco Combustible.
- **Reglas GRADUALES** (*Gradual Rules*):
 - Ejemplo: Cuanto Más se Abra la Válvula, Mayor Temperatura.
- **Reglas CONFLICTIVAS y Potencialmente Inconsistentes**: Son reglas que pueden generar problemas o malos resultados, pues suelen representar información contradictoria.
 - **Reglas con el mismo antecedente y consecuentes contradictorios:**
 - SI A ENTONCES B, y SI A ENTONCES ¬B.
 - Ejemplo:
 - Si Temper. es Alta ENTONCES Abrir Poco la Válvula.
 - Si Temper. es Alta ENTONCES Abrir Mucho la Válvula.
 - **Reglas encadenadas en ambos sentidos negando un consecuente:**
 - SI A ENTONCES B, y SI B ENTONCES ¬A.
 - Ejemplo:
 - Si Temper. es Alta Entonces Abrir Poco la Válvula.
 - Si Válvula está Poco Abierta Entonces Bajar Temper. 16

Sintaxis de las Reglas Difusas

- **Sintaxis de las Proposiciones:** Formatos posibles:
 - El <Atrib.> del <Objeto> es <Valor> \models La Humedad del Suelo es Alta
 - <Atrib.> es una Variable Lingüística o Atributo del <Objeto>.
 - <Valor> es una Etiqueta Lingüística de ese Atributo.
 - <Atributo> (<Objeto>) es <Valor> \models Humedad(Suelo) es Alta.
 - <AtributoDeUnObjeto> es <Valor> \models Humedad es Alta.
 - Es el formato más usual representado como: X es A .
- **Proposiciones Cualificadas:** X es A con certeza $m \in \hat{I} [0,1]$.
 - Pueden transformarse en proposiciones con certeza 1: X es B donde B es calculada por (Yager, 1984):

$$B(x) = [m \text{ t } A(x)] + (1 - m).$$
 - Si $m=1$, entonces $B=A$.
 - Si $m=0$, entonces $B=U$ (Universo de X).
 - El valor B tiene menos especificidad que el original A .
 - Cuanto mayor es la certeza m , mayor será la especificidad de B .

17

Sintaxis de las Reglas Difusas

- **Proposiciones COMPUESTAS:** Usan conjunciones o disyunciones:
 - Esta forma induce relaciones difusas (P) sobre las variables (X_i), definidas con una t-norma T o una s-norma S , sobre las etiquetas lingüísticas (A_i), (según sean conjunciones o disyunciones respectivamente.):

<p>Conjunciones:</p> $P(x_1, \dots, x_n) = T_{i=1}^n A_i(x_i);$	<p>Disyunciones:</p> $P(x_1, \dots, x_n) = S_{i=1}^n A_i(x_i);$
---	---
 - Estas proposiciones pueden ser expresadas también como: (X_1, \dots, X_n) es P ;
- **Regla Simple:** Si X es A , entonces Y es B .
 - Puede ponerse como “ (X, Y) es P ”, donde P es una *relación difusa* definida en los universos de X e Y : $P: X \times Y \rightarrow [0,1]$
- **Regla con Proposiciones Compuestas:**
 - Puede ponerse como “ $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ es P ”, donde P es una *relación difusa* definida en los universos de las variables del antecedente (X_i) y del consecuente (Y_i):

$$P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = f(P_a(x_1, \dots, x_n), P_c(y_1, \dots, y_m));$$
 - donde f es un operador de Implicación o una t-norma y, P_a y P_c son *relaciones* inducidas por el antecedente y el consecuente respectivamente.

18

Sintaxis de las Reglas Difusas

- **Reglas Cualificadas:** Si ... Entonces ... con certeza m .
 - Si su forma equivalente usa la *relación* P : “ $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ es P con certeza m ”, puede usarse la *relación* Q con certeza 1:

$$Q(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = [m \wedge P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)] + (1 - m).$$
- **Reglas Cuantificadas:** También se pueden traducir a una relación (Yager, 1984) y la forma de hacerlo varia dependiendo de si el cuantificador es absoluto o relativo.
- **Reglas con Excepciones:**

Si X es A , Entonces Y es B , excepto que Z sea C .

 - Puede traducirse por: Si X es A y Z es $\neg C$, entonces Y es B .
Si X es A y Z es C , entonces Y es $\neg B$.
 - Si hay muchas excepciones se busca una única relación $R(x,y,z)$ que las represente (Driankov, Hellendorn, 1992).
- **Reglas Graduales:**

Cuanto [más | menos] X es A , [más | menos] Y es B .

 - Se traducen también como una relación $R(x,y)$, sabiendo que si es “más” (resp. “menos”), entonces $A(x) \wedge B(y)$ (resp. $B(y) \wedge A(x)$) (Dubois, Prade, 1992).

19

Semántica de las Reglas Difusas

- **Semántica de una Regla Difusa:** Si X es A , entonces Y es B .
 - Describe una *relación difusa* entre las variables X e Y :

$$P(x,y) = f(A(x), B(y)), \quad (x,y) \in (X \times Y)$$
 - donde f es una función de la forma $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, que puede derivarse de tres formas distintas:
 - **Funciones de conjunción, t-norma:** Típicamente se usan dos:
 - Función de Mamdani: t-norma del mínimo.
 - Función de Larsen: t-norma del producto.
 - **Funciones de disyunción, s-norma.**
 - **Funciones de Implicación:** Se usa mucho la I. de Lukasiewicz o sus formas parametrizadas:
 - f es la I. de Lukasiewicz si $\lambda=0$:

$$f(A(x), B(y)) = \min \left\{ 1, \frac{1 - A(x) + (1 + \lambda)B(y)}{1 + \lambda A(x)} \right\}, \quad \lambda > -1;$$
 - f es la I. de Lukasiewicz si $w=1$:

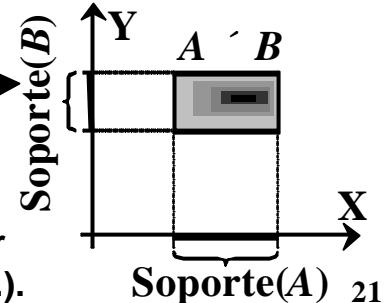
$$f(A(x), B(y)) = \min \left\{ 1, (1 - A(x)^w + B(y)^w)^{1/w} \right\}, \quad w > 0;$$

20

Semántica de las Reglas Difusas

- **Semántica de una Regla Difusa:** Si X es A , entonces Y es B .
 - Una Regla puede verse como una *Relación Difusa* inducida por una *Restricción Difusa* sobre la variable unión: (X, Y) .
 - Si esa *Restricción* es vista como una conjunción difusa (una generalización del Producto Cartesiano, $A \times B$), entonces la regla puede expresarse de la siguiente forma:

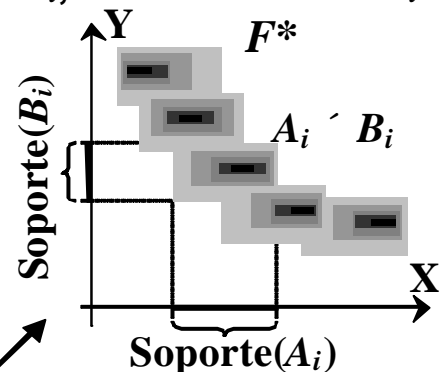
$$“(X, Y) \text{ es } (A \times B)”.$$
 - Por supuesto, esta expresión sólo tendrá sentido considerarla (procesarla) si se cumple el antecedente de la regla (X es A).
 - El Producto Cartesiano es un conjunto difuso cuya función de pertenencia se calcula por: $(A \times B)(x, y) = A(x) \text{ t } B(y)$, $(x, y) \in (X \times Y)$
 - Si se usa la t-norma del mínimo, entonces $(A \times B)$ está expresando un “punto difuso” en el espacio $(X \times Y)$: Punto en el que se cumple que “ X es A , y también que Y es B ” (Zadeh, 1975, 1994a; Kosko, 1994).
 - t define el significado de la regla y puede ser también otro tipo de función f (implicación...).



Semántica de las Reglas Difusas

- **Si se disparan N Reglas** del tipo “Si X es A_i , Entonces Y es B_i ”
 - El significado puede definirse como:

$$“(X, Y) \text{ es } \left(\sum_{i=1}^N A_i \times B_i \right)”$$
 - La sumatoria expresa una AGREGACIÓN disyuntiva, ya que, como es lógico, la variable (X, Y) sólo tomará un valor (difuso).
 - Esta representación se llama “Gráfico Difuso F^* ” (Fuzzy Graph).
 - Su objeto correspondiente en una relación no difusa es el gráfico de una función $y = f(x)$: $F = \{ (x, y) \mid y = f(x), (x, y) \in (X \times Y) \}$.
 - » Para un valor concreto $x = a$, es fácil calcular el valor $y = f(a)$.
 - El Gráfico Difuso F^* es una generalización representada granularmente y calculada de forma general por (considerando la restricción de la regla como una conjunción con la t-norma t):



$$F^*(x, y) = \sum_{i=1}^N A_i \times B_i = \bigvee_{i=1}^N (A_i(x) \text{ t } B_i(y)), \quad \forall (x, y) \in X \times Y;$$

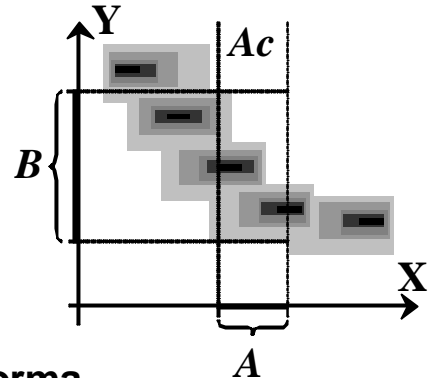
$\text{t-norma o Función de Implicación}$

Semántica de las Reglas Difusas

- **Inferencia en un Gráfico Difuso:** Si tenemos una dependencia funcional F^* entre dos variables X e Y , podemos calcular el valor B de la variable de salida Y sabiendo que el valor de la variable de entrada X es A :
 - 1. Calcular $Ac \hat{=} X \dot{=} Y$: Extensión cilíndrica con base A .
 - 2. Calcular I : Intersección de Ac con F^* .
 - 3. Calcular B : Proyectar I sobre Y :

$$B = \text{Proy}_Y (Ac \cap F^*)$$
- Poniendo la intersección como una t-norma y la proyección como la operación sup, tenemos que:

$$B(y) = \sup_x (Ac(x) \text{ t } F^*(x, y)) = \sup_x (A(x) \text{ t } F^*(x, y))$$
- Esos 3 pasos son la esencia de la Regla Composicional de Inferencia (Zadeh, 1973, 1975, 1988), jugando F^* el papel de una Implicación Difusa.
 - Una parte esencial en el diseño de sistemas basados en Reglas Difusas es asignar la semántica apropiada a las reglas.
 - En determinados casos los cálculos se simplifican.



23

Cálculos con Reglas Difusas

- **Antecedentes Compuestos:**
 - Tengamos una colección de N reglas del tipo: $k = 1, 2, \dots, N$
 “Si X es A_k (y) Y es B_k , Entonces Z es C_k ”
 - En ese caso, se toma como si el antecedente fuera del tipo:
 “ (X, Y) es P_k ”, donde P_k es calculada con una t-norma:

$$P_k(x, y) = A_k(x) \text{ t } B_k(y)$$
 - Si el operador fuera la disyunción (o), se tomaría una s-norma.
- **Entradas crisp para X e Y :** a y b respectivamente.
 - Con entradas *crisp* los cálculos se simplifican mucho.
 - Sea m_k el valor resultante de aplicar la t-norma a los valores obtenidos en el antecedente de la Regla k : $m_k = A_k(a) \text{ t } B_k(b)$.
 - m_k es llamado “**Grado de Activación**” (Activation Degree) y mide la contribución de la regla k en la inferencia global.
 - El conjunto difuso resultante C es calculado como la unión de los conjuntos difusos C'_k obtenidos en cada regla:

$$C(z) = \bigcup_{k=1}^N C'_k = S_{k=1}^N (m_k \text{ t } C_k(z)), \quad \forall z \in Z;$$

24

Cálculos con Reglas Difusas

- **Elecciones Importantes:** Al efectuar una inferencia sobre un conjunto de reglas, debemos elegir apropiadamente:
 - Una t-norma para definir el operador de conjunción (y) y una s-norma para el operador de disyunción (o), que se aplicará en el antecedente y el consecuente de cada regla.
 - Una función f para definir el significado de cada regla k , o sea el significado de la Implicación (t-norma usada en el cálculo de F^*).
 - Una t-norma para la Regla Composicional de Inferencia.
 - Un operador de Agregación Ag para la Regla de Combinación (s-norma utilizada en el cálculo de F^*).
- **Si se disparan N Reglas simples** del tipo “Si X es A_i , entonces Y es B_i ”, sabiendo que el valor de la variable de entrada X es A , el valor de la variable de salida Y será el conjunto difuso $B(y) =$

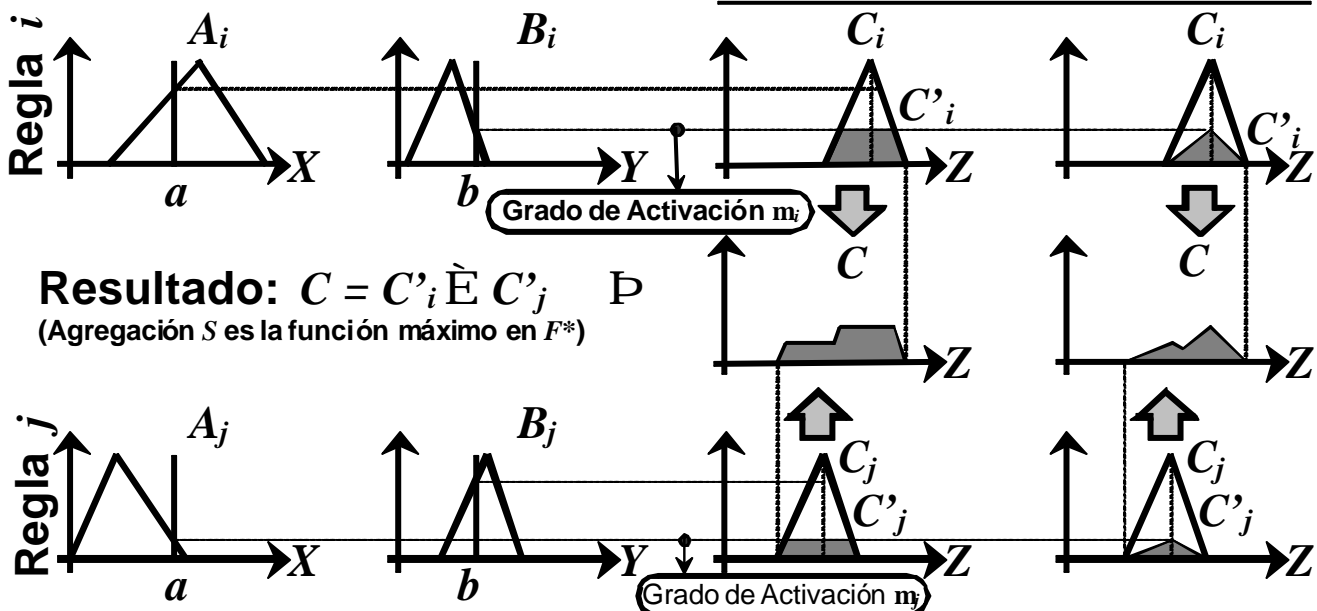
$$= \sup_x \left(A(x) \mathrel{\mathbf{t}} \bigwedge_{k=1}^N \left(f(A_k(x), B_k(y)) \right) \right) = \bigwedge_{k=1}^N \left(\sup_x \left(A(x) \mathrel{\mathbf{t}} f(A_k(x), B_k(y)) \right) \right);$$
 - La Regla Composicional de Inferencia puede aplicarse también localmente a cada regla y agregar los resultados al final.

25

Cálculos con Reglas Difusas: Ejemplo

- **Ejemplo con entradas crisp para X e Y :** a y b respectivamente.
 - Ejemplo gráfico con **dos reglas** $k \in \{i, j\}$, usando:
 - t-norma del **mínimo** para los antecedentes ($m_k = \min\{A_k(a), B_k(b)\}$),
 - t-norma del **mínimo** o del **producto** como Implicación:

$$k \in \{i, j\} \quad \vdash \quad C'_k(z) = \frac{\min\{C_k(z), m_k\} \cdot m_k}{m_k} = \min\{C_k(z), m_k\}$$



26

Cálculos con Reglas Difusas

- **Se disparan N Reglas compuestas** usando operadores de conjunción (y) en el antecedente y el consecuente: $k = 1, 2, \dots, N$
 “Si X_1 es A_{1k} y X_2 es A_{2k} y ... y X_n es A_{nk}
 Entonces Y_1 es B_{1k} y Y_2 es B_{2k} y ... y Y_m es B_{mk} ”
- **Datos de Entrada:** X_1 es A_1 y X_2 es A_2 y ... y X_n es A_n
- **Resultado:** $B(y_1, y_2, \dots, y_m) =$

$$= \bigwedge_{k=1}^N \left(\sup_x \left(A(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ t } f(A_k(x_1, x_2, \dots, x_n), B_k(y_1, y_2, \dots, y_m)) \right) \right);$$
 donde

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^n A_i(x_i); \quad \text{P Aplicar t-norma a las Entradas.}$$

$$A_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^n A_{ik}(x_i); \quad \text{P Aplicar t-norma en el Antecedente.}$$

$$B_k(y_1, y_2, \dots, y_n) = \bigwedge_{i=1}^n B_{ik}(y_i); \quad \Rightarrow \text{Aplicar t-norma en el Consecuente.}$$
 - Con el operador de disyunción (o) se aplicará una s-norma.

27

Cálculos con Reglas Difusas

- **Resumiendo, el Proceso General es el siguiente:**
 - 1. **Emparejar Antecedentes y Entradas:**
 - Para cada REGLA se calcula el grado de emparejamiento entre cada proposición atómica de su antecedente y el valor correspondiente de la entrada.
 - 2. **Grado de Activación o Agregación de los Antecedentes:**
 - Para cada REGLA se calcula el Grado de Activación aplicando una conjunción (t) o disyunción (s) según corresponda a los valores anteriores del Paso 1.
 - 3. **Resultado de cada Regla:**
 - Para cada REGLA se calcula su valor resultante según su Grado de Activación y la semántica elegida para la Regla.
 - Este es el paso más largo y complejo: Para cada valor en las Salidas se debe calcular el mayor valor de la operación, para todos los posibles valores de las Entradas (operación \sup_x).
 - 4. **Regla de Combinación:**
 - Agregación de todos los resultados individuales obtenidos de cada una de las reglas aplicadas.

28

Propiedades de los S.B.R. Difusas

- **Fase de Concisión (Defuzzification Stage):**
 - Se añade cuando las salidas del S.B.R. Difusas deben ser no difusas.
 - Para esto se usan los Sistemas de Decodificación: Centro de Gravedad, Media de Máximos, Centro de Area...
 - Este suele ser un requisito fundamental en aplicaciones de Ingeniería, como el modelado difuso (*fuzzy modeling*) o el control difuso (*fuzzy control*).
- **Aproximación de Funciones (Function Approximation):**
 - Los S.B.R. Difusas pueden verse como sistemas difusos de aproximación de funciones.
 - Los S.B.R. difusas son vistos como Gráficos Difusos (F^*).
 - Para que los S.B.R. sean considerados “Aproximadores Universales” (*Universal Approximators*) deben cumplir **algunas propiedades**: Antecedentes con formato conjuntivo, utilización de ciertas t-normas, cierta forma en las etiquetas lingüísticas (trapezoidales...), cierta función de concisión (CoG...)...
 - Muchos autores lo han estudiado (Kosko, 1994; Castro, Delgado, 1996...). 29

Propiedades de los S.B.R. Difusas

- **Completitud de un S.B.R. Difusas (Completeness):**
 - Si para cualquier valor de las Entradas, el S.B.R. genera una respuesta.
 - Una colección de N reglas (Pedrycz, 1993):

“Si X es A_i , Entonces Y es B_i ”.

 - es “completa” si " $x \in X$, existe al menos un $i \in [1, N]$, tal que:

$$A_i(x) > e, \quad e \in (0, 1]$$
 - Esto quiere decir que hay alguna regla que se dispara con cierto grado mínimo e : " $x \in X \quad \left(\bigcup_{i=1}^N A_i(x) \right) > e$ "
 - Esta condición es fácil de cumplir:
 - Es intuitivo que los conjuntos difusos de las etiquetas lingüísticas deberían superponerse (marco de conocimiento con cubrimiento de nivel e).
 - Si no se cumple, entonces es muy posible que alguna etiqueta se haya perdido, lo que implica que se ha omitido una parte importante de la información.

Bibliografía

- J. Baldwin, "A New Approach to Approximate Reasoning using a Fuzzy Logic". Fuzzy Set and Systems, 2, pp. 309-325, 1979.
- J.L. Castro, M. Delgado, "Fuzzy Systems with Defuzzification are Universal Approximators". IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics 26, pp. 149-152, 1996.
- D. Driankov, H. Hellendorn, "Fuzzy Logic with Unless-Rules". Report IDA- RKL-92-TR 50, Laboratory For Representation of Knowledge in Logic, Dept. of Computer and Information Science, Linkoping University, Sweden , 1992.
- D. Dubois, H. Prade, "Gradual Inference Rules in Approximate Reasoning". Information Sciences, 61, pp. 103-122, 1992.
- G. Epstein, 'Multiple-Valued Logic Design: An Introduction'. Institute of Physics Publishing, Bristol, U.K., 1993.
- M.M. Gupta, J. Qi, "Theory of T-norms and Fuzzy Inference Methods". Fuzzy Sets and Systems, 40, pp. 431-450, 1991.
- B. Kosko, "Fuzzy Systemas are Universal Approximators". IEEE Trans. on Computers, 43(11), pp. 329-332, 1994.
- J.C. Muzio, T. Wesselkamper, 'Multiple-Valued Switching Theory'. A. Hilger, Bristol, U.K., Boston, 1986.
- V. Novak, "Fuzzy Logic as aBasis of Approximate Reasoning". In Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty, ed. L.A. Zadeh and J. Kacprzyk, pp. 247-264. Wiley Interscience, New York, 1992.
- W. Pedrycz, "Fuzzy Control and Fuzzy Systems". RSP Press, New York, 1993.
- W. Pedrycz, "Fuzzy Sets Engineering". CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

31

Bibliografía

- H. Rasiowa, "Toward Fuzzy Logic". In Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty, ed. L.A. Zadeh and J. Kacprzyk, pp. 5-25. Wiley Interscience, New York, 1992.
- N. Rescher, 'Many-Valued Logics'. McGraw-Hill, New York, 1969.
- E. Trillas, L. Valverde, 'On Implication and Indistinguishability in the Setting of Fuzzy Logic". In Management Decision Support Systems Using Fuzzy Sets and Possibility Theory, Eds. J. Kacprzyk, R.R. Yager, pp. 198-212, Verlag, TÜV Rheinland, Köln, 1985.
- Y. Tsukamoto, "An Approach to Fuzzy Reasoning Method". In Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, ed. M. Gupta, R. Ragade, R. Yager, pp. 137-149. North-Holland, Netherlands, 1979.
- R.R. Yager, "Approximate Reasoning as aBasis for Rule-Based Expert Systems". IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 14(4), pp. 636-643, 1984.
- L.A. Zadeh, "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes" IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 3(1):28-44, 1973.
- L.A. Zadeh, "The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoing" (parts I and II). Information Sciences, 8, pp. 199-249, pp. 301-357, 1975.
- L.A. Zadeh, "A Theory of Approximate Reasoning". In Machine Intelligence, ed. J. Hayes and J. Michie, vol. 9, pp. 149-194, Halstead Press, New York, 1979.
- L.A. Zadeh, "Fuzzy Logic". IEEE Computer, 21(4), pp. 83-92, 1988.
- L.A. Zadeh, "Knowledge Representation in Fuzzy Logic". IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering, 11(1), pp. 89-100, 1989.
- L.A. Zadeh, "Fuzzy Logic, Neural Networks and Soft Computing". Communications of the ACM, 37(3), pp. 77-84, 1994a.
- L.A. Zadeh, "Soft Computing and Fuzzy Logic". IEEE Softw., 11(6), pp. 48-56, 1994b.

32