Práctica 6 - Diagonalización de Matrices Hermíticas - Formas Cuadráticas - Descomposición en Valores Singulares

Nota: en todos los ejercicios, salvo que se indique lo contrario, $(\cdot,\cdot)$ representa el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$.

1. Encontrar números a, b y c de manera tal que:

   1) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & a \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & b \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & c \end{bmatrix}$ sea ortogonal. 2) $U = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & a \\ \frac{1-i}{2} & b \end{bmatrix}$ sea unitaria.

2. Determine cuáles de las matrices de los ejercicios 5 y 6 del T.P. 4 son ortogonales.

3. Demuestre que las matrices de Householder son ortogonales (ver ejercicio 28 (d) del T.P. 2).

4. Demuestre las siguientes propiedades de las matrices unitarias:

   (a) U es unitaria $\Leftrightarrow$ U^H es unitaria $\Leftrightarrow$ U^T es unitaria.

   (b) Si U y V son unitarias entonces UV es unitaria.

5. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la trasformación lineal definida por $T(x) = Px$ con $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal. Demuestre lo siguiente:

   (a) $(T(x), T(x')) = (x, x')$ para todo $x, x' \in \mathbb{R}^n$. En particular $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

   (b) $x \perp x'$ si y sólo si $T(x) \perp T(x')$.

   (c) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

   (d) Si $\mathcal{S}$ es un subespacio invariante por T, entonces $T(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ y $T(\mathcal{S}^\perp) = \mathcal{S}^\perp$.

6. Idem ejercicio 5 pero con $\mathbb{C}^n$ en lugar de $\mathbb{R}^n$ y $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria en lugar de $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal.

7. Suponga que $B_1 = \{v_1; \ldots; v_n\}$ y $B_2 = \{u_1; \ldots; u_n\}$ son bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). Demuestre que la matriz de cambio de base $C_{B_1B_2}$ es una matriz ortogonal (resp. unitaria). (Sugerencia: demuéstrelo primero para el caso en que B_2 es la base canónica. Otra alternativa es emplear el ejercicio 9 del T.P. 2).

8. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que para cierta base ortonormal B, $[T]_B$ es ortogonal. Demuestre que:

(a) $[T]_{B'}$ es ortogonal para cualquier otra base ortonormal B'.

(b) Valen (a)-(d) del ejercicio 5.

9. Halle $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $T \neq \pm I$, tal que $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ sea invariante por T y, además, $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

10. Explique por qué las rotaciones y las simetrías preservan los ángulos entre vectores y las longitudes de éstos.

11. Halle los autovalores y autovectores de la matriz ortogonal del ejercicio 1. Calcule el módulo de cada autovalor y el producto interno entre dos autovectores correspondientes a dos autovalores diferentes.

12. Demuestre que los autovalores de una matriz unitaria son de módulo uno y que autovectores correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.

13. Diagonalice ortogonalmente cada una de las siguientes matrices simétricas, es decir, exprese cada una de ellas en la forma $P\Lambda P^T$, con P ortogonal y Λ diagonal:
i) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -2 & -36 & 0 \\ -36 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

14. Diagonalice unitariamente cada una de las siguientes matrices Hermíticas, es decir, exprese cada una de ellas en la forma $U\Lambda U^H$, con U unitaria y Λ diagonal:
i) $\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. Compruebe que las siguientes matrices puede ser diagonalizadas unitariamente, aún sin ser Hermíticas:
i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

16. Califique cada una de las siguientes afirmaciones como verdadera o falsa:

(a) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable ortogonalmente entonces A es simétrica.

(b) Una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene n autovalores reales distintos.

(c) Las multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor de una matriz simétrica coinciden.

(d) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable unitariamente entonces A es Hermítica.

(e) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable unitariamente y sus autovalores son reales entonces A es Hermítica.

(f) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable unitariamente entonces A^k también es diagonalizable unitariamente.

(g) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable unitariamente entonces su inversa, en caso de existir, también es diagonalizable unitariamente.

17. Demuestre con un ejemplo que el producto de matrices Hermíticas no es necesariamente una matriz Hermítica.

18. Suponga que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y que $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Demuestre que B^TAB, B^TB y BB^T son simétricas.

19. Se dice que una matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es antisimétrica si $C^T = -C$.

    (a) Encuentre los autovalores y autovectores de la matriz antisimétrica
    $$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$
    y compruebe que sus autovalores son imaginarios puros y que es diagonalizable unitariamente.

    (b) Considere $A = iC$ y compruebe que A es Hermítica. Explique por qué a partir de esto último se deduce que los autovalores de C son imaginarios puros y que C es diagonalizable unitariamente.

    (c) Demuestre que si $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es antisimétrica entonces $A = iC$ es Hermítica.

    (d) Deduzca del punto anterior que una matriz real antisimétrica tiene autovalores imaginarios puros o nulos, que autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales y que es diagonalizable unitariamente.

    (e) Demuestre que una matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ antisimétrica es singular si n es impar.

20. Halle $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica tal que $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ sean sus autovalores y $\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\{[1\ 1\ 1]^T\}$.

21. Halle una matriz Hermítica $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $B = A^3 - A^2 + A - I$ sea singular, $\lambda = 2$ sea autovalor doble y $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{C}^3 : x_1 - ix_2 + x_3 = 0\}$ sea invariante por A. ¿ Es única A?; si no lo es encuentre dos diferentes.

22. Encuentre la matriz de cada una de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$.
    a) $10x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$ b) $5x_1^2 + 3x_1x_2$ c) x_1x_2.

23. Encuentre la matriz de cada una de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$.
    a) $4x_1x_2+6x_1x_3-8x_2x_3$ b) $8x_1^2+7x_2^2-3x_3^2-6x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$ c) $x_1^2-x_1x_3+x_3^2$.

24. Clasifique cada una de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ y efectúe un cambio de variables $x = Py$ que transforme la forma cuadrática en una sin término de producto cruzado. Escriba la nueva forma cuadrática. Grafique los conjuntos de nivel.
    a) $x_1^2+10x_1x_2+x_2^2$ b) $3x_1^2-4x_1x_2+6x_2^2$ c) $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ d) $-4x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$.

25. Clasifique cada una de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$ y efectúe un cambio de variables $x = Py$ que transforme la forma cuadrática en una sin término de producto cruzado. Escriba la nueva forma cuadrática.
a) $5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
b) $3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
c) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$.

26. Dada la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = -\frac{4}{5}x_1^2 + \frac{6}{5}x_1x_2 + \frac{4}{5}x_2^2$, demuestre que $-\|x\|_2^2 \leq Q(x) \leq \|x\|_2^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

27. El siguiente ejercicio muestra cómo clasificar una forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$, donde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sin encontrar los autovalores de A. Demostrar:

   (a) Q es definida positiva si y sólo si $a_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$.

   (b) Q es definida negativa si y sólo si $a_{11} < 0$ y $\det(A) > 0$.

   (c) Q es indefinida si y sólo si $\det(A) < 0$.

   (Sugerencia: Tenga en cuenta que si λ_1 y λ_2 son los autovalores de A, entonces $\text{traza}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ y $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$).

28. Demuestre que la expresión $(x, y) = x^H Qy$ con $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermítica define un producto interno en $\mathbb{C}^n$ si y sólo si Q es definida positiva.

29. Determine cuáles de las siguientes expresiones determinan productos internos en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$.
a) $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$ b) $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$
c) $7x_1y_1 - 4x_1y_2 + 4x_1y_3 - 4x_2y_1 + 5x_2y_2 + 4x_3y_1 + 9x_3y_3$.
Para los que resulten productos internos, graficar la bola unitaria.

30. Compruebe que $(x, y) = 2\overline{x_1}y_1 + i\overline{x_1}y_2 - i\overline{x_2}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$ es un producto interno en $\mathbb{C}^3$.

31. Demuestre que si $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces $G = B^T B$ es semidefinida positiva. Encuentre la condición que debe cumplir B para que G resulte definida positiva. (A G se la denomina matriz de *Gram* de B.)

32. Encuentre el máximo y el mínimo de la formas cuadráticas de los ejercicios 24 y 25, sujetos a la restricción $x^T x = 1$.

33. Dada la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = -2x_1^2+2x_1x_2-2x_2^2-10x_3^2$, determinar los valores máximo y mínimo de $Q(x)$ sujeto a la restricción $x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 = 9$, y los valores de x para los cuales se alcanzan esos extremos.(Sugerencia: considere un cambio de variable que transforme la restricción dada en una de la forma $x^T x = 1$.)

34. Encuentre el máximo y el mínimo de la forma cuadrática $Q(x) = x_1^2 + x_2^2$ sujeto a la restricción $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 4$. Halle los x para los cuales se alcanza el extremo.

35. Encuentre los puntos de la curva

$$2x_1^2 + 6x_2^2 - 2\sqrt{5}x_1x_2 = 1$$

más cercanos al origen de dos formas diferentes:

(a) Minimizando $\|x\|$ con x sujeto a una restricción adecuada.

(b) Haciendo un cambio de variables adecuado y resolviendo el problema en las nuevas variables.

36. Encuentre una descomposición en valores singulares (DVS) de cada una de las siguientes matrices

a) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

37. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre de entre todos los vectores de norma 1, uno tal que $\|T(x)\|$ sea máxima y otro tal que $\|T(x)\|$ sea mínima. ¿ Qué relación encuentra entre lo que obtuvo y los valores singulares de A?

38. Suponga que $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $A = U\Sigma V^T$ es una DVS de A. Justifique cada respuesta.

(a) Suponga que A es cuadrada e inversible. Encuentre una DVS de A^{-1}.

(b) Demuestre que si A es cuadrada, $|\det(A)|$ es igual al producto de los valores singulares de A.

(c) Demuestre que las columnas de V son autovectores de A^TA y que las columnas de U son autovectores de AA^T.

(d) Demuestre que los valores singulares no nulos de A coinciden con los valores singulares no nulos de A^T y de allí deduzca que el rango de A y de A^T coinciden.

(e) Demuestre que si A es $n \times n$ y definida positiva, entonces los valores singulares y los autovalores de A coinciden.

(f) Halle una DVS de $G = A^TA$ y demuestre que: i) los rangos de A y de G coinciden, ii) G es inversible si y sólo si el rango de A es m. (Compare con el ejercicio 21 del T.P. 3).

(g) Demuestre que si P es ortogonal PA y A (AP y A) tienen los mismos valores singulares.

39. A partir de las descomposiciones en valores singulares halladas en el ejercicio 36 encuentre descomposiciones en valores singulares de la inversa de la matriz del punto c. y de la transpuesta de la matriz del punto e.

40. Halle la pseudoinversa de A, con A la matriz del ejercicio 36 e. y encuentre la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = b$, con $b = [1 \ -1]^T$.

41. Demuestre que en el caso en que $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tiene rango m, la pseudoinversa de A definida a partir de una DVS de A y la seudoinversa definida en el ejercicio 21 d. del T.P. 3, coinciden.

42. Compruebe que $A = U\Sigma V^T$ con

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

es una descomposición en valores singulares de A y, a partir de ella, calcule rango(A), las matrices de proyección a col(A) y Nul(A) y la seudoinversa de Moore-Penrose. Encuentre los $x \in \mathbb{R}^3$ unitarios que maximizan $\|Ax\|$.

43. Sabiendo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

obtener una DVS de A sin calcular previamente A y, a partir de ella, hallar una DVS de A^T y calcular las matrices de proyección a col($\mathrm{A^T}$) y Nul(A^T) y la seudoinversa de Moore-Penrose de A^T.

44. Decidir si son verdaderas las siguientes afirmaciones

    (a) Si A y B son matrices semejantes ortogonalmente entonces A y B tienen los mismos valores singulares.

    (b) Si $A \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathbb{R}^n$ tienen los mismos autovalores, entonces A y B tienen los mismos valores singulares.

    (c) Si $A \in \mathbb{R}^n$ es simétrica, entonces los valores singulares de A son iguales a los autovalores de A.

    (d) Si $A \in \mathbb{R}^n$ es simétrica, entonces los valores singulares de A son iguales a los módulos de los autovalores de A.

45. Sea $A \in \mathbb{R}^n$ y sean σ_m y σ_M el mínimo y el máximo valor singular de A respectivamente. Demuestre que si λ es un autovalor real de A entonces $\sigma_m \leq |\lambda| \leq \sigma_M$. (Sugerencia: considere el producto $v^T Av$ con v un autovector unitario de A.)