

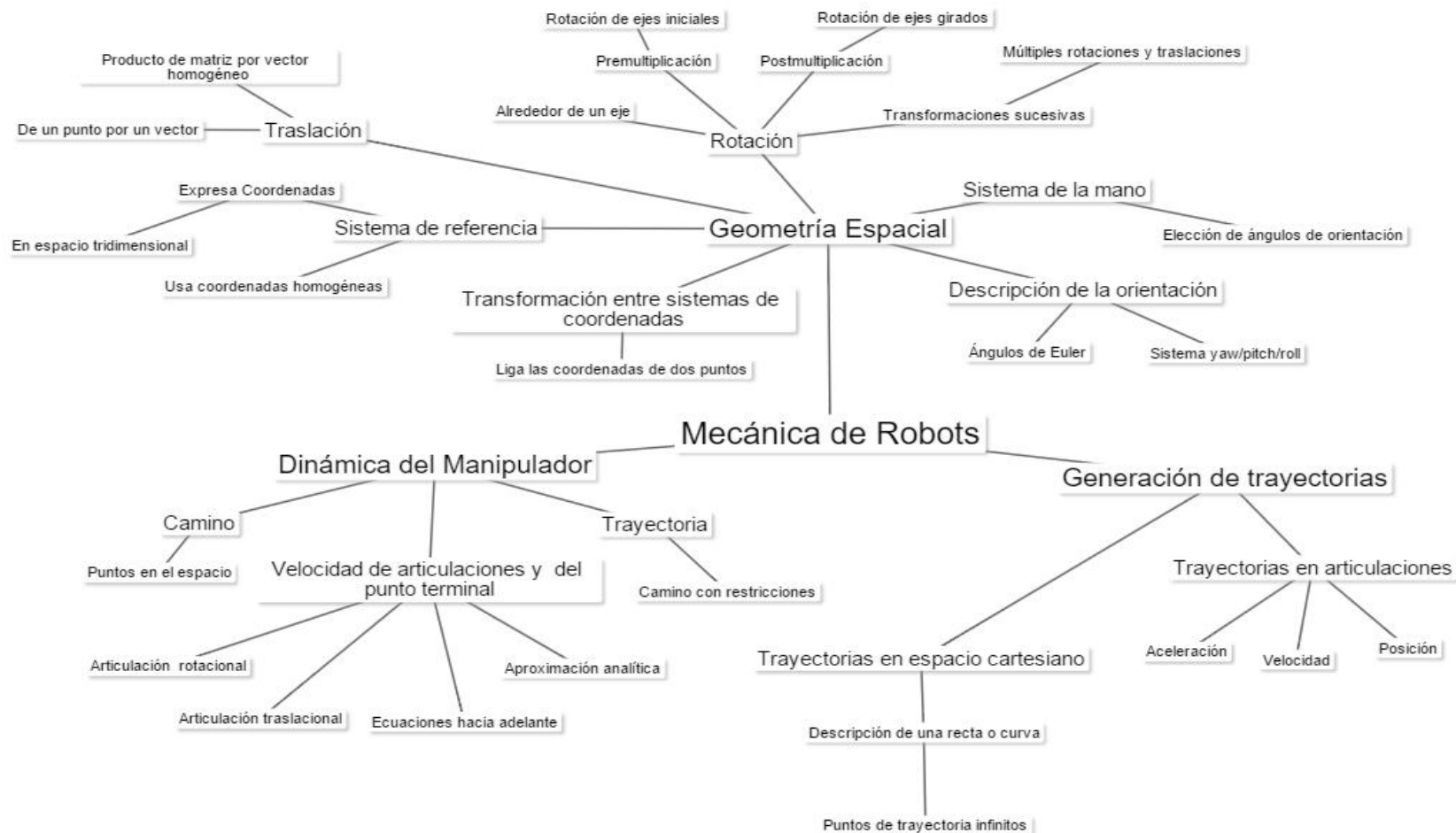
Mecánica de Robots

Dehivis Fallas Marín - B12450

Erick Palma Solano - B14876

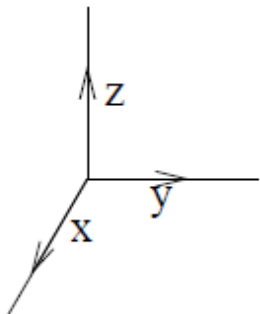
David Ramírez Guerrero - B05097

German Solís Guerrero - B16406



Conceptos Básicos de Geometría Espacial





Sistema ortonormal
dextrogiro: $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} x' &= xw \\ y' &= yw \\ z' &= zw \end{aligned}$$

- Sistema de referencia:
rectilíneo, ortogonal,
normalizado y dextrógiro.
- Coordenadas Homogéneas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 1 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Traslación: suma de vector v al punto x .

$$Rot(x, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rot(y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rot(z, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rotación alrededor de un eje
-

$$R_{\vec{r},\theta} = \begin{pmatrix} r_x^2 v\theta + c\theta & r_x r_y v\theta - r_z s\theta & r_x r_z v\theta + r_y c\theta & 0 \\ r_x r_y v\theta + r_z s\theta & r_y^2 v\theta + c\theta & r_y r_z v\theta - r_x s\theta & 0 \\ r_x r_z v\theta - r_y s\theta & r_y r_z v\theta + r_x s\theta & r_x^2 v\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rotación alrededor de un eje cualquiera: donde $v\theta = 1 - \cos\theta$.
 - Transformaciones sucesivas: producto, orden debido.
 - Premultiplicación: rotación, ejes iniciales.
 - Postmultiplicación: rotación, ejes girados.
-

Descripción de la orientación:

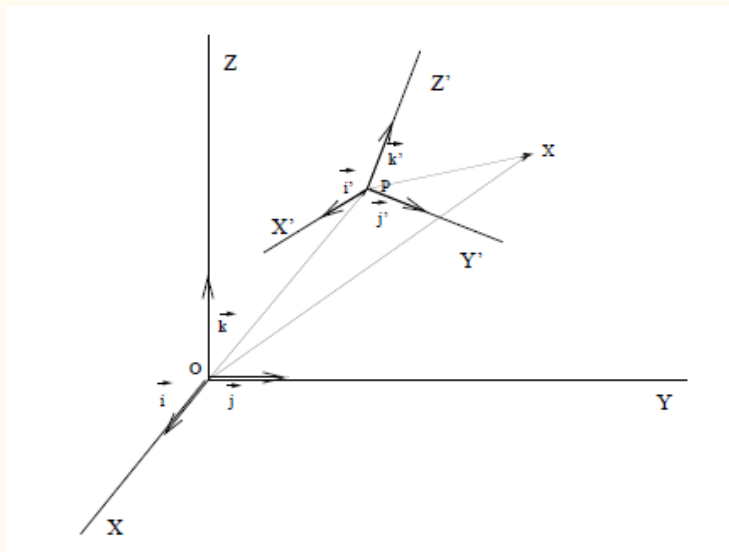
$$R_{\phi,\theta,\psi} = \begin{pmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\psi & -s\psi & 0 & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta & 0 \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta & 0 \\ -s\phi c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{y,p,r} = \begin{pmatrix} cy & -sy & 0 & 0 \\ sy & cy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cp & 0 & sp & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sp & 0 & cp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cr & -sr & 0 \\ 0 & sr & cr & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} cypc & cyspsr - sysr & cyspcr + sysr & 0 \\ sysc & syspsr + cysr & syspcr - cysr & 0 \\ -sp & cpsr & cpcr & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ángulos de Euler
- yaw/pitch/roll(desviación,
elevación, giro)



Transformación entre sistemas de coordenadas:

- Rotar y trasladar apropiadamente el segundo sistema de modo que sus ejes se superpongan a los del primero.
- Liga coordenadas de punto entre sistemas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{ix}) & \cos(\alpha_{jx}) & \cos(\alpha_{kx}) & p_x \\ \cos(\alpha_{iy}) & \cos(\alpha_{jy}) & \cos(\alpha_{ky}) & p_y \\ \cos(\alpha_{iz}) & \cos(\alpha_{jz}) & \cos(\alpha_{kz}) & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{y,p,r} = \begin{pmatrix} cyspsr - sysr & cyspcr + sysr & cycp & 0 \\ syspsr + cycr & syspcr - cysr & syscp & 0 \\ cpsr & cpcr & -sp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema de la mano

- Elección de ángulos de orientación

Dinámica del Manipulador



Establecer la relación entre las velocidades a las que se mueve cada articulación y la velocidad a la que lo hace el punto terminal del brazo.

- Camino
- Trayectoria

Velocidades

$${}^R\vec{v}_{i+1} = {}^R\vec{v}_i + \left. \frac{d\vec{r}_{i,i+1}}{dt} \right|_{R_i} + {}^R\vec{\omega}_{i+1} \wedge {}^R\vec{r}_{i,i+1}$$

Articulación Traslacional

$$\left. \frac{d\vec{r}_{i,i+1}}{dt} \right|_{R_i} = \dot{d}_{i+1} \vec{k}_i$$

$$\vec{\omega}_{i+1} = \vec{\omega}_i$$

Articulación Rotacional

$$\left. \frac{d\vec{r}_{i,i+1}}{dt} \right|_{R_i} = 0$$

$$\vec{\omega}_{i+1} = \vec{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \vec{k}_i$$

Aceleración

$$\begin{aligned} {}^R\vec{a}_{i+1} = & {}^R\vec{a}_i + \left. \frac{d^2\vec{r}_{i,i+1}}{dt^2} \right|_{R_i} + 2 {}^R\vec{\omega}_{i+1} \wedge \left. \frac{d\vec{r}_{i,i+1}}{dt} \right|_{R_i} \\ & + {}^R\dot{\vec{\omega}}_{i+1} \wedge \vec{r}_{i,i+1} + {}^R\vec{\omega}_{i+1} \wedge ({}^R\vec{\omega}_{i+1} \wedge \vec{r}_{i,i+1}) \end{aligned}$$

Conociendo las posiciones y velocidades lineales y angulares del elemento 0, se calcularán las del 1, y así sucesivamente, hasta llegar al punto terminal.

- Expresiones usadas son formulación de Newton-Euler.
 - Ecuaciones hacia adelante.
 - Cinética directa.
-

- Problema inverso.
- 2 maneras: numéricamente y analíticamente.
- Ley de Newton: mecánica de traslación y rotación.

$$\sum_i \vec{F}_i = m_i \vec{a} \quad \text{y tambien} \quad \sum_i \vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- Ecuaciones dinámicas o hacia atrás.

$$\vec{f}_{i-1,i} - \vec{f}_{i,i+1} + m_i \vec{g} = m_i \vec{a}_{ci}$$

$$\vec{\tau}_{i-1,i} - \vec{\tau}_{i,i+1} - \vec{c}_{i-1,i} \wedge \vec{f}_{i-1,i} + \vec{c}_{i,i} \wedge \vec{f}_{i,i+1} = I_i \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \wedge I_i \vec{\omega}_i$$

$$\vec{f}_{i-1,i} = \vec{f}_{i,i+1} - m_i \vec{g} + m_i \vec{a}_{ci}$$

$$\vec{\tau}_{i-1,i} = \vec{\tau}_{i,i+1} + (\vec{r}_{i-1,i} - \vec{c}_{ii}) \wedge \vec{f}_{i-1,i} + \vec{c}_{ii} \wedge \vec{f}_{i,i+1} + I_i \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \wedge I_i \vec{\omega}_i$$

Para levantar un objeto la fórmula que da la fuerza y el momento que debe ejercer el motor de la última articulación es dado por:

$$\vec{f}_{n-1,n} = -M\vec{g} - m_n\vec{g} + m_n\vec{a}_{cn}$$

$$\vec{\tau}_{n-1,n} = \vec{R} \wedge (-M\vec{g}) + (\vec{r}_{n-1} - \vec{c}_{nn}) \wedge \vec{f}_{n-1,n} + \vec{c}_{nn} \wedge (-M\vec{g}) + I_n \dot{\vec{\omega}}_n + \vec{\omega}_n \wedge I_n \vec{\omega}_n$$

Generación de Trayectorias

—

Trayectorias en el espacio de articulaciones

- Cómo un brazo de robot debería moverse para trasladarse.
- Posición, velocidad y aceleración.
- Vector de valores que representan posición y orientación.

Trayectorias en el espacio de articulaciones

- Función debe ser continua, ser derivable, y con derivada continua.
 - Parte del reposo y termina en reposo.
-

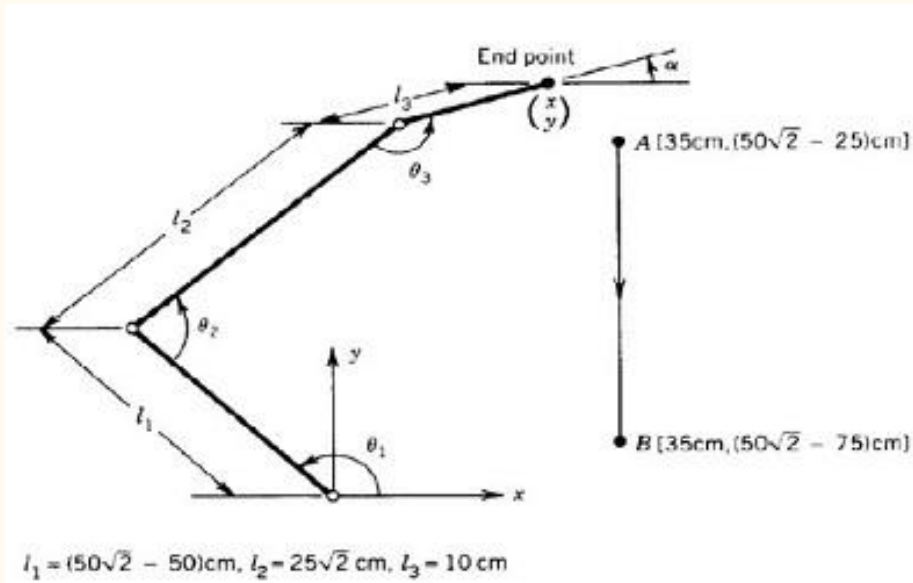
Fijar velocidades de articulación

- Velocidad cartesiana y convertirla mediante cinemática inversa.
- El sistema escoja velocidad heurísticamente.
- Hacer que la aceleración en los puntos intermedios sea continua.

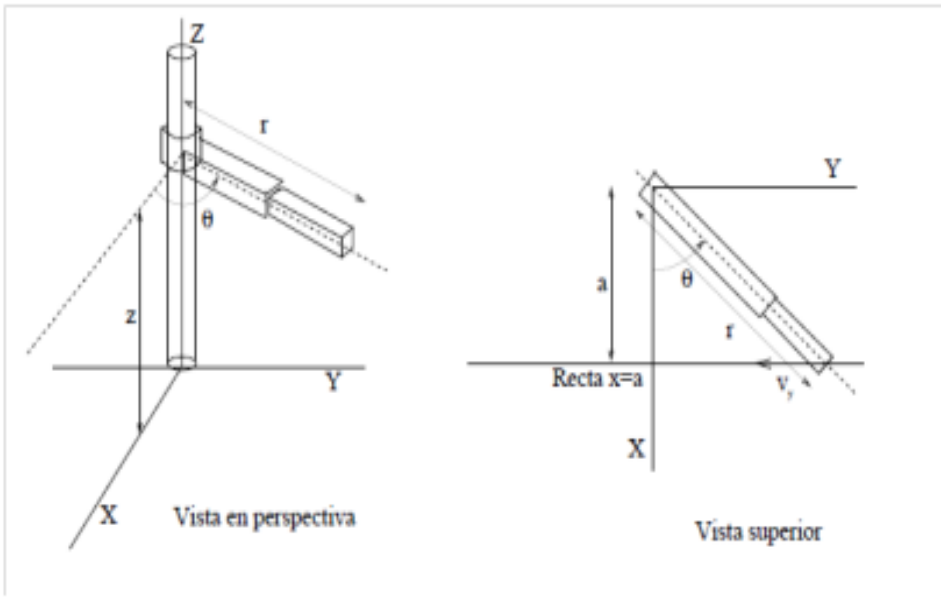
Trayectorias en el espacio de articulaciones

- Derivadas en funciones polinomiales de grado 3.
 - Sistemas de ecuaciones para cada tiempo de posición de brazo robótico.
-

Trayectorias en el espacio cartesiano



- Punto terminal describa una recta o curva.
- Normalmente se escoge un conjunto discreto.
- Interpolación. (Nuevos puntos a partir de conjuntos discretos).



Problemas en trayectorias en espacio cartesiano

- Parte del camino que se desea recorrer esté fuera del espacio de accesibilidad.
- Pasar sobre, o cerca de singularidades.

Referencias

- Domingo, J. (2001). Robótica Apuntes para la asignatura. Universidad de Valencia, España, 3.