

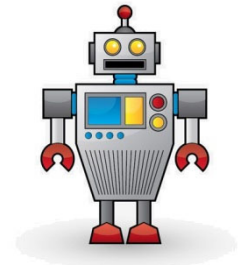


ECCI
Escuela de Ciencias de la
Computación e Informática

Cinemática Inversa del Robot

CI-2657 Robótica

Prof. Kryscia Ramírez Benavides





Introducción

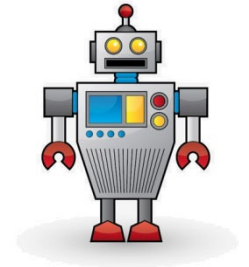
- 🤖 Resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocidas.



Introducción (cont.)

Cinemática

	Cinemática directa →→	
Valor de las coordenadas articulares ($q_0, q_1, \dots, q_n$)		Posición y orientación del extremo del robot ($x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$)
	←← Cinemática inversa	



Cinemática Inversa



Cinemática Inversa

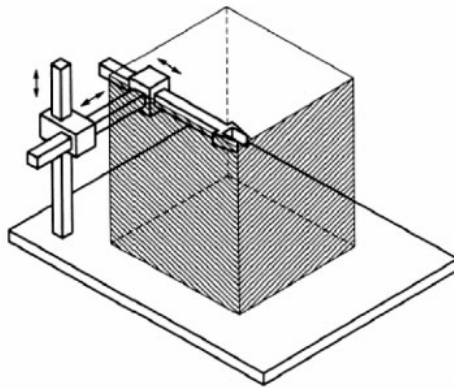
- 🤖 Dada la posición del efector final y la longitud de cada enlace, encontrar los ángulos de las articulaciones.
- 🤖 El objetivo consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot $q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.
- 🤖 El procedimiento de obtención de las ecuaciones es dependiente de la configuración del robot.



Cinemática Inversa (cont.)

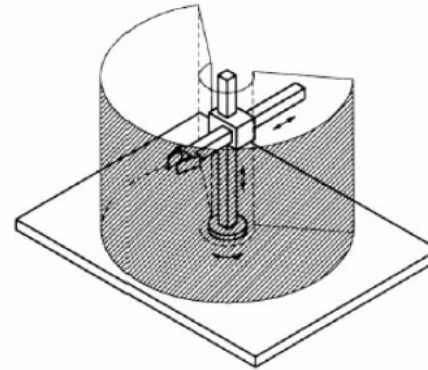
- 🤖 Problema difícil de resolver.
 - 🤖 Obtener los valores de las variables articulares para que el enlace terminal tenga una determinada posición y orientación
- 🤖 Se deben resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales simultáneas.
- 🤖 Problemas fundamentales:
 - 🤖 Ecuaciones no lineales (*sen*, *cos* en matrices de rotación).
 - 🤖 Existen múltiples soluciones.
 - 🤖 Es posible que no exista una solución.
 - 🤖 Singularidades.

Cinemática Inversa (cont.)

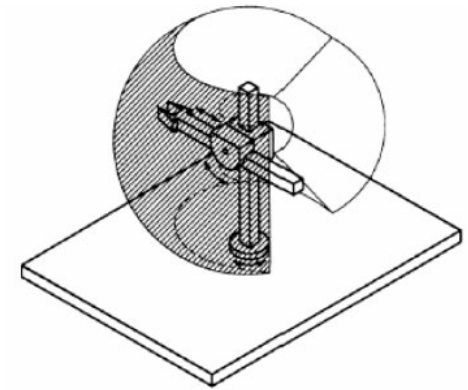


Cartesiano

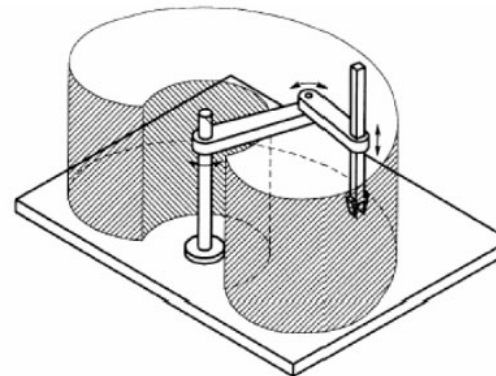
Espacio alcanzable:
Volumen del espacio que el robot puede alcanzar con al menos una orientación



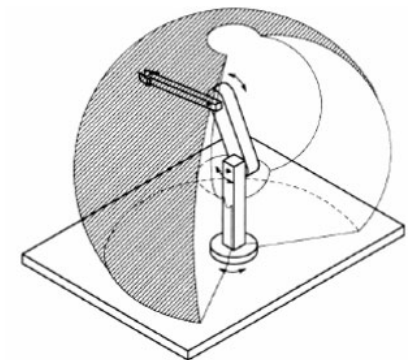
Cilíndrico



Esférico



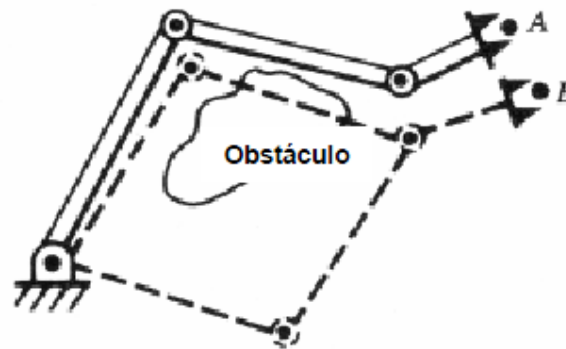
Scara



Antropomórfico

Cinemática Inversa (cont.)

- 🤖 Deben atenderse las múltiples soluciones:
 - 🤖 Elección que minimice los movimientos desde la posición actual.
 - 🤖 Concepto de solución más cercana.
 - 🤖 Mover los enlaces de menor peso.
 - 🤖 Considerar obstáculos (evitar colisiones).





Cinemática Inversa (cont.)

- 🤖 Manipulador resoluble: Existe un algoritmo que permite determinar todas las soluciones del modelo inverso (variables articulares) asociadas a una determinada posición y orientación.
- 🤖 Teóricamente es resoluble todo sistema R y P con 6 grados de libertad.
- 🤖 Métodos numéricos iterativos: lentitud.
- 🤖 Se prefieren expresiones analíticas (soluciones cerradas):
 - 🤖 Métodos algebraicos.
 - 🤖 Métodos geométricos.



Cinemática Inversa (cont.)

- 🤖 Se han desarrollado algunos procedimientos genéricos para ser programados, de modo que un computador pueda, a partir del conocimiento de la cinemática del robot (parámetros de DH, por ejemplo) obtener la n -tupla de valores articulares que posicionan y orientan su extremo.
- 🤖 El inconveniente de estos procedimientos es que se trata de métodos numéricos iterativos, cuya velocidad de convergencia e incluso su convergencia no está siempre garantizada.

Cinemática Inversa (cont.)

- 🤖 A la hora de resolver el problema cinemático inverso es mucho más adecuado encontrar una solución cerrada.
- 🤖 Esto es, encontrar una relación matemática explícita de la forma:
 - 🤖 $q_k = F_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$
 - 🤖 $k = 1 \dots n$ (grados de libertad)



Cinemática Inversa (cont.)

 Este tipo de solución presenta las siguientes ventajas:

-  En muchas aplicaciones, el problema cinemático inverso se debe resolver en tiempo real (por ejemplo, seguir una determinada trayectoria). Una solución de tipo iterativo no garantiza tener la solución en el momento adecuado.
-  Al contrario de lo que ocurría en el problema cinemático directo, con cierta frecuencia la solución del problema cinemático inverso no es única; existiendo diferentes n -tuplas $(q_1, \dots, q_n) \in T$ que posicionan y orientan el extremo del robot del mismo modo. En estos casos una solución cerrada permite incluir determinadas reglas o restricciones que aseguren que la solución obtenida sea la más adecuada posible.



Cinemática Inversa (cont.)

- 🤖 No obstante, la mayor parte de los robots poseen cinemáticas relativamente simples que facilitan en cierta medida la resolución de su problema cinemático inverso.
- 🤖 Por ejemplo, si se consideran solo los tres primeros grados de libertad de muchos robots, estos tienen una estructura planar, los tres primeros elementos quedan contenidos en un plano. Esta circunstancia facilita la resolución del problema.
- 🤖 Asimismo, en muchos robots se da la circunstancia de que los tres grados de libertad últimos, dedicados fundamentalmente a orientar el extremo del robot, correspondan a giros sobre los ejes que se cortan en un punto.

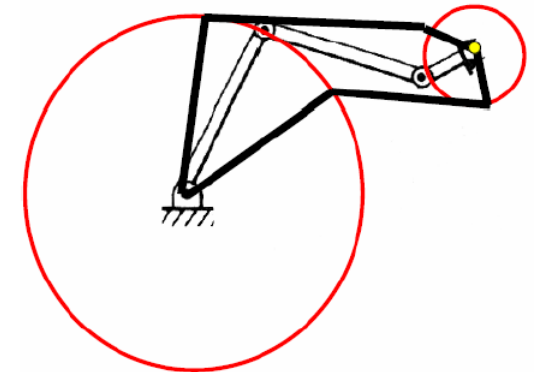
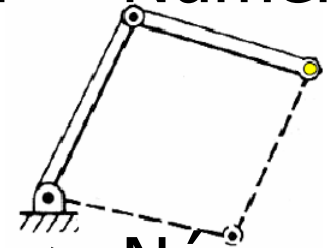


Cinemática Inversa (cont.)

- 🤖 De nuevo esta situación facilita el cálculo de la n -upla $(q_1, \dots, q_n)_{exp}$. T correspondiente a la posición y orientación deseadas.
- 🤖 Por lo tanto, para los casos citados y otros, es posible establecer ciertas pautas generales que permitan plantear y resolver el problema cinemático inverso de una manera sistemática.

Cinemática Inversa (cont.)

- 🤖 Se desea: Posicionar el elemento terminal en un punto del plano.
- 🤖 Número de GDL del manipulador = Número de GDL que requiere la tarea.
 - 🤖 Dos soluciones
- 🤖 Número de GDL del manipulador > Número de GDL que requiere la tarea.
 - 🤖 Infinitas soluciones





Cinemática Inversa (cont.)

 **Solución:** Conjunto de variables articulares que permiten posicionar el elemento terminal en una determinada posición y orientación.

 No existen algoritmos generales de solución al problema de cinemática inversa.

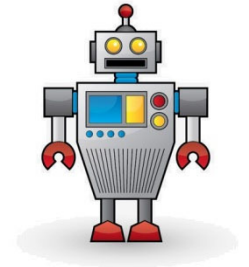
 **Tipos de solución:**

 **Métodos geométricos:** Se suele utilizar para las primeras variables articulares, uso de relaciones geométricas y trigonométricas.

 **Por matrices de transformación homogénea:** Despejar las n variables q_i en función de los componentes de los vectores n , o , a y p .

 **Desacoplamiento cinemático:** En robots de 6DOF, separación de orientación y posicionamiento.

 **Soluciones numéricas (iterativas):** No aplicables en tiempo real.



Métodos Geométricos



Métodos Geométricos

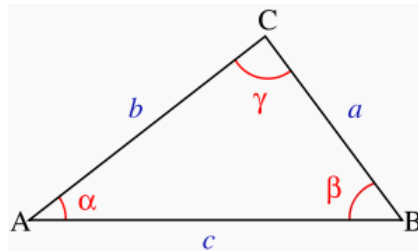
- 🤖 Este procedimiento es adecuado para robots de pocos grados de libertad o para el caso de que se consideren solo los primeros grados de libertad, dedicados a posicionar el extremo.
- 🤖 El procedimiento se basa en encontrar un número suficiente de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos.

Métodos Geométricos (cont.)



Identidades trigonométricas:

[http://es.wikipedia.org/wiki/Identidades trigonom%C3%A9tricas](http://es.wikipedia.org/wiki/Identidades_trigonom%C3%A9tricas)



Teorema del seno

Si en un triángulo ABC , las medidas de los lados opuestos a los ángulos A , B y C son respectivamente a , b , c , entonces

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Teorema del coseno

Dado un triángulo ABC , siendo α , β , γ , los ángulos, y a , b , c , los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

Teorema de la tangente

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)]}{\tan[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)]}$$

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

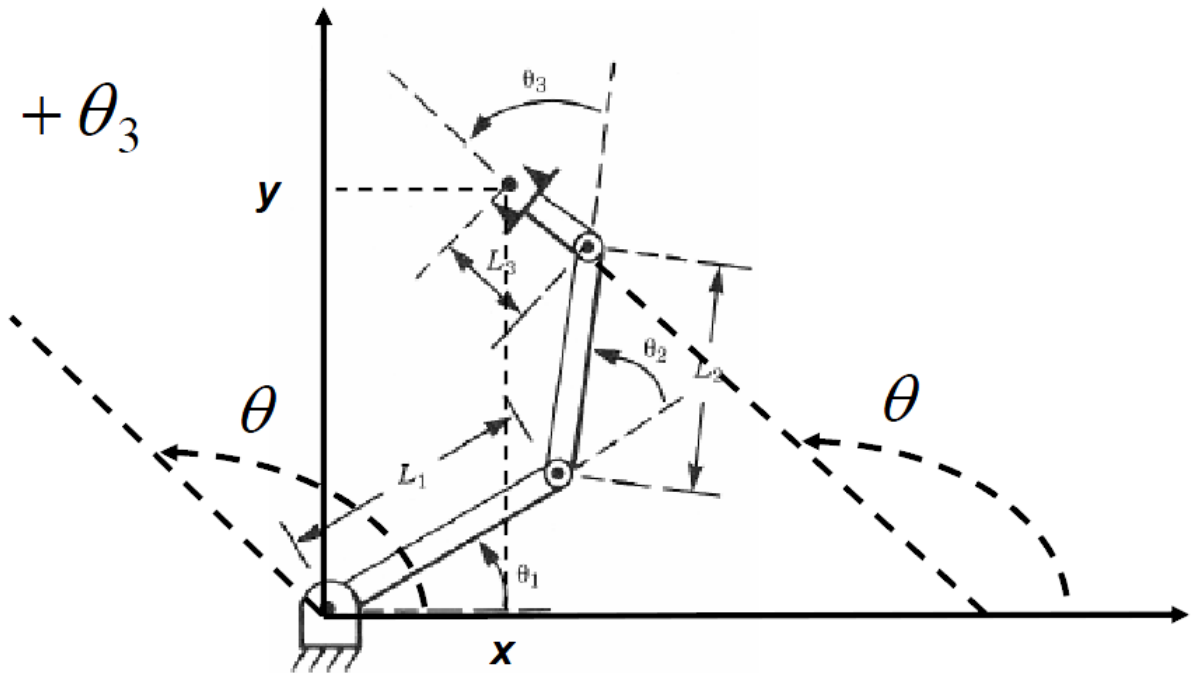
$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \sin \theta_2 \cos \theta_1$$

$$\tan(\theta_1 \pm \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 \pm \tan \theta_2}{1 \mp \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

Métodos Geométricos (cont.)

- La orientación del último enlace es la suma de las variables articulares

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

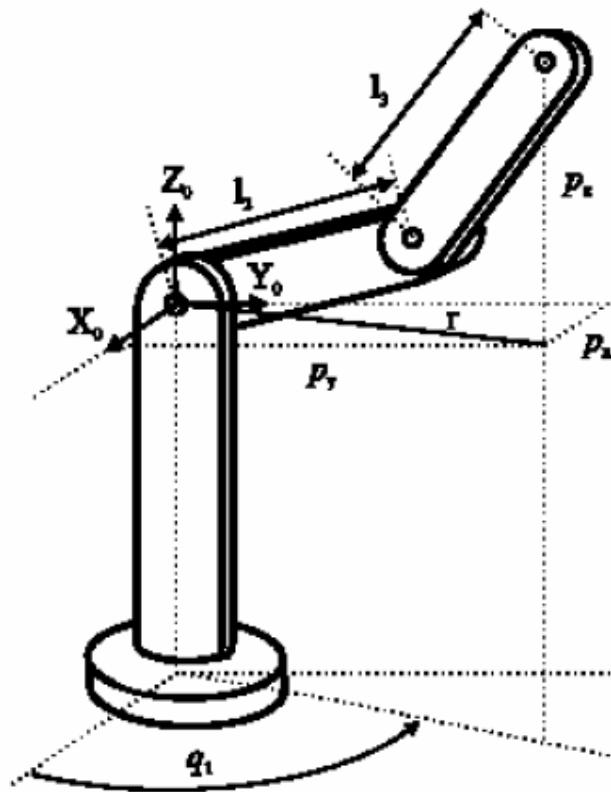




Métodos Geométricos (cont.)

- 🤖 Para mostrar el procedimiento a seguir se va a aplicar el método a un robot con 3DOF de rotación (estructura típica articular).
- 🤖 El dato de partida son las coordenadas (P_x , P_y , P_z) referidas a (S_0) en las que se requiere posicionar su extremo.
- 🤖 Como se ve este robot posee una estructura planar, quedando este plano definido por el ángulo de la primera variable articular q_1 .

Métodos Geométricos (cont.)



$$q_1 = \arctg\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= p_x^2 + p_y^2 \\ r^2 + p_z^2 &= l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3\cos q_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

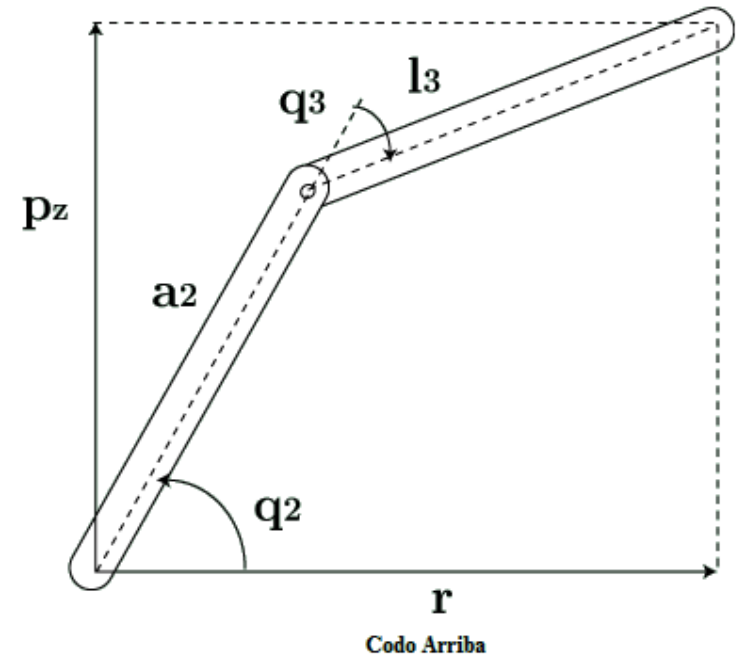
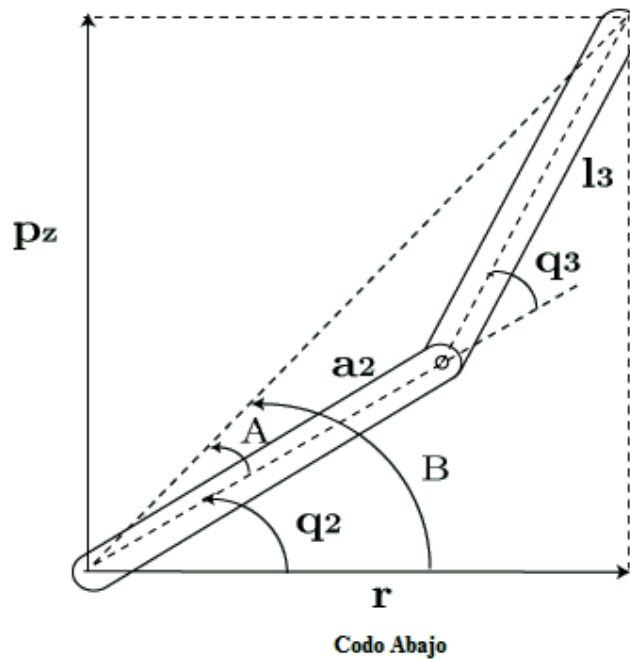
$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

$$\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

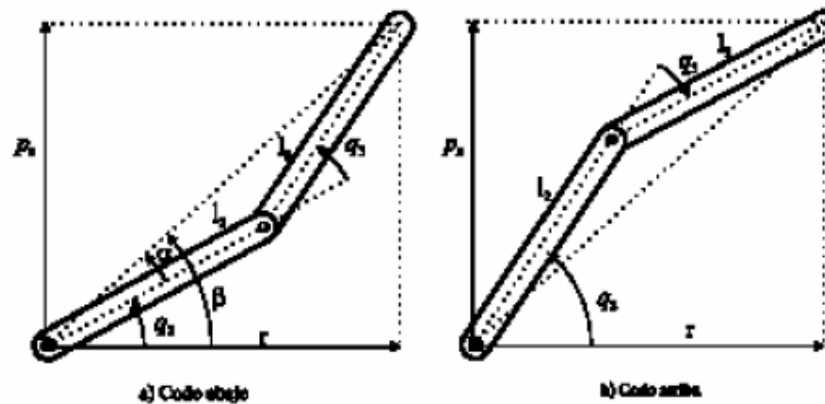
$$q_3 = \arctg\left(\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)$$

$$\text{con } \cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

Métodos Geométricos (cont.)



Métodos Geométricos (cont.)

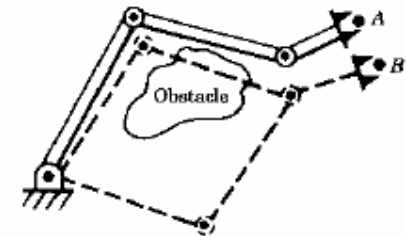


$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{p_z}{r}\right) = \arctg\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

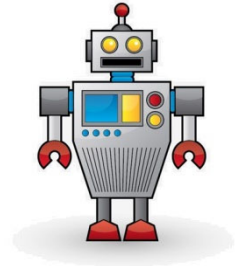
$$q_2 = \arctg\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \arctg\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$





Métodos Geométricos (cont.)

- 🤖 Como se ve, existen dos posibles soluciones para q_2 y q_3 según se tome el signo positivo o negativo de la raíz.
- 🤖 Estas corresponden a las configuraciones de codo arriba y codo abajo del robot.



Matriz de Transformación Homogénea



Matriz de Transformación Homogénea

- 🤖 En principio es posible tratar de obtener el modelo cinemático inverso de un robot a partir del conocimiento de su modelo directo.
- 🤖 Es decir, suponiendo conocidas las relaciones que expresan el valor de la posición y orientación del extremo del robot en función de sus coordenadas articulares, obtener por manipulación de aquellas las relaciones inversas.



Matriz de Transformación Homogénea (cont.)

- 🤖 Sin embargo, en la práctica esta tarea no es trivial siendo en muchas ocasiones tan compleja que obliga a desecharla.
- 🤖 Además, puesto que el problema cinemático directo, resuelto a través de T_{ij} contiene en el caso de un robot de 6DOF 12 ecuaciones, y se busca solo 6 relaciones (una por cada grado de libertad), existirá, necesariamente ciertas dependencias entre las 12 expresiones de partida con lo cual la elección de las ecuaciones debe hacerse con sumo cuidado.

Matriz de Transformación Homogénea (cont.)

- 🤖 Se va a aplicar este procedimiento al robot de 3DOF de configuración esférica (2 giros y un desplazamiento).
- 🤖 El robot queda siempre contenido en un plano determinado por el ángulo q_1 .

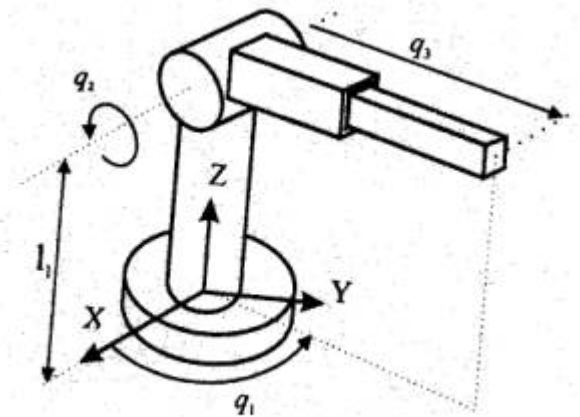


Figura 4.9. Robot polar de 3 GDL.



Matriz de Transformación Homogénea (cont.)

- 🤖 El primer paso a dar para resolver el problema cinemático inverso es obtener T_{ij} correspondiente a este robot.
 - 🤖 Es decir, obtener la matriz T que relaciona el sistema de referencia (S_0) asociado a la base con el sistema de referencia (S_3) asociado a su extremo.
- 🤖 A continuación se muestra la asignación de sistemas de referencia según los criterios de DH con el robot situado en su posición de partida ($q_1 = q_2 = 0$), y los valores de los parámetros de DH.



Matriz de Transformación Homogénea (cont.)

- 🤖 A partir de esto es inmediato obtener las matrices A y la matriz T .
- 🤖 Obtenida la expresión de T en función de las coordenadas articulares (q_1, q_2, q_3) , y supuesta una localización de destino para el extremo del robot definida por los vectores n, o, a y p , se podría intentar manipular directamente las 12 ecuaciones resultantes de T a fin de despejar q_1, q_2 y q_3 en función de n, o, a y p .



Matriz de Transformación Homogénea (cont.)

- 🤖 Sin embargo, este procedimiento directo es complicado, apareciendo ecuaciones trascendentes.
- 🤖 En lugar de ello, suele ser más adecuado aplicar el siguiente procedimiento:
 - 🤖 Puesto que $T = {}^0A_1({}^1A_2){}^2A_3$, se tendrá que:
 - 🤖 $({}^1/{}^0A_1)T = {}^1A_2({}^2A_3)$
 - 🤖 $({}^2/{}^1A_2)({}^1/{}^0A_1)T = {}^2A_3$

Matriz de Transformación Homogénea (cont.)

$${}^{i-1}A_i = T_{z,d}T_{z,\theta}T_{x,a}T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como es sabido, la inversa es la transpuesta

$${}^iA_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i & -d_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Transformación Homogénea (cont.)

🤖 $[x_i, y_i, z_i]$ = Matriz de orientación del sistema de coordenadas i -ésimo establecido en el elemento i con respecto al sistema de coordenadas de la base. Es la matriz particionada superior izquierda 3x3 de 0T_i .

🤖 p_i = Vector de posición que apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenadas i -ésimo. Es la matriz particionada superior derecha 3x1 de 0T_i .

$${}^0T_i = {}^0A_1 {}^1A_2 \cdots {}^{i-1}A_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1}A_j \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

$$= \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_i & {}^0p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2-34)$$

Matriz de Transformación Homogénea (cont.)

Para $i = 6$, se tiene la siguiente matriz T :

$$T = \begin{bmatrix} x_6 & y_6 & z_6 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0p_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

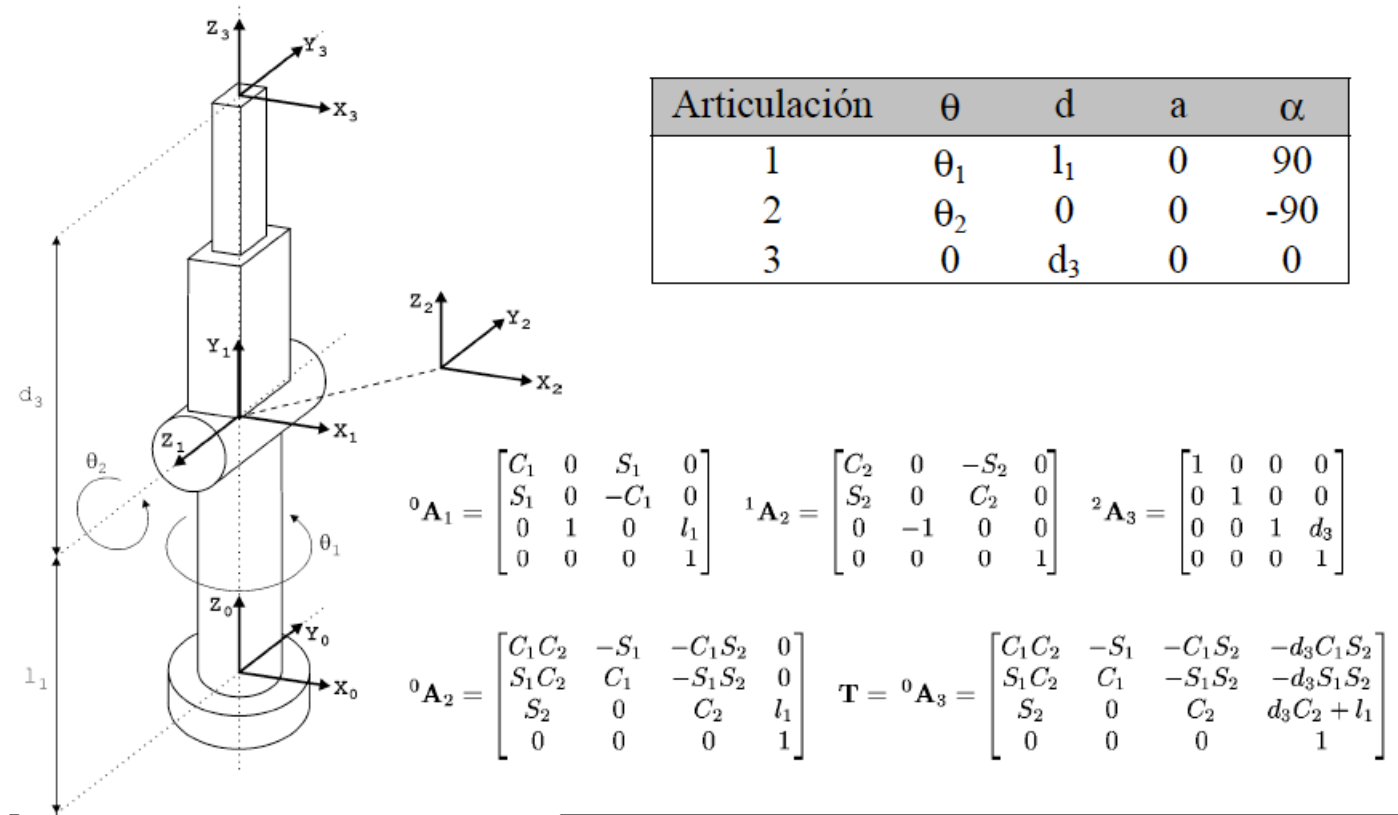
n = Vector normal de la mano. Suponiendo una mano del tipo de mordaza paralela que es ortogonal a los dedos del brazo del robot.

s = Vector de deslizamiento de la mano. Está apuntando en la dirección del movimiento de los dedos cuando la pinza se abre y se cierra.

a = Vector de aproximación de la mano. Está apuntando en la dirección normal a la palma de la mano (placa de montaje de la herramienta).

p = Vector de posición de la mano. Apunta desde el origen del SC de la base hasta el origen del SC de la mano, que se suele localizar en el punto central de los dedos totalmente cerrados.

Matriz de Transformación Homogénea (cont.)



Matriz de Transformación Homogénea (cont.)

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$$

$$({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{T} = {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & -S_2 d_3 \\ S_2 & 0 & C_2 & C_2 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eligiendo el elemento (3,4):

$$S_1 p_x - C_1 p_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan \theta_1 = \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_1 = \arctan \left(\frac{p_y}{p_x} \right)}$$

Matriz de Transformación Homogénea (cont.)

$$({}^1\mathbf{A}_2)^{-1} ({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{T} = {}^2\mathbf{A}_3$$

$$\begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

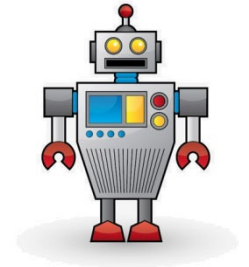
$$\begin{bmatrix} C_2C_1 & C_2S_1 & S_2 & -l_1S_2 \\ -S_1 & C_1 & 1 & 0 \\ -S_2C_1 & -S_2S_1 & C_2 & -l_1C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eligiendo el elemento (1,4):

$$C_2C_1p_x + C_2S_1p_y + S_2p_z - l_1S_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_2 = \arctan -\frac{C_1p_x + S_1p_y}{p_z - l_1}}$$

Eligiendo el elemento (3,4):

$$-S_2C_1p_x - S_2S_1p_y + C_2p_z - C_2l_1 = d_3 \Rightarrow \boxed{d_3 = C_2(p_z - l_1) - S_2(C_1p_x + S_1p_y)}$$



Desacoplamiento Cinemático



Desacoplamiento Cinemático

- Los procedimientos vistos permiten obtener los valores de las 3 primeras variables articulares del robot, aquellas que posicionan su extremo en las coordenadas (P_x, P_y, P_z) determinadas, aunque pueden ser igualmente utilizadas para la obtención de las 6 a costa de una mayor complejidad.



Desacoplamiento Cinemático (cont.)

- 🤖 En general no basta con posicionar el extremo del robot en un punto del espacio, sino que es preciso conseguir que la herramienta se oriente de una manera determinada.
- 🤖 Para ello, los robots cuentan con otros tres grados de libertad adicionales, situados al final de la cadena cinemática y cuyos ejes, generalmente, se cortan en un punto, que informalmente se denomina muñeca del robot.



Desacoplamiento Cinemático (cont.)

- 🤖 Si bien la variación de estos tres últimos grados de libertad origina un cambio en la posición final del extremo real del robot, su verdadero objetivo es poder orientar la herramienta del robot libremente en el espacio.



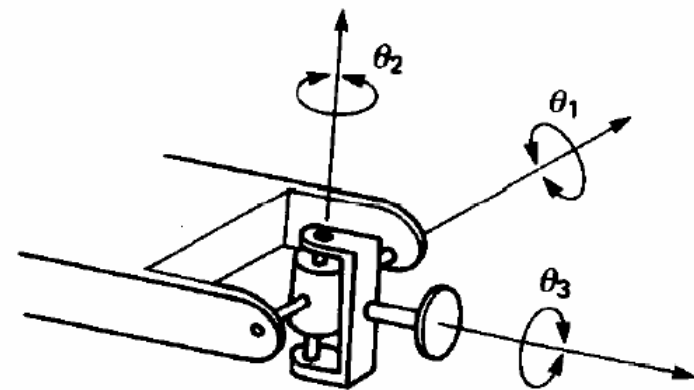
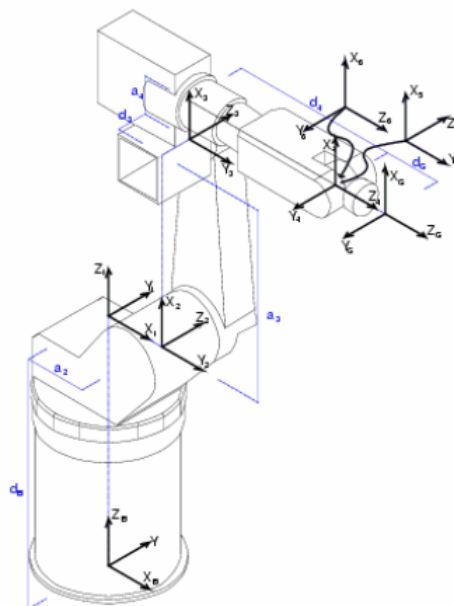
Desacoplamiento Cinemático (cont.)

- 🤖 El método de desacoplo cinemático saca partido de este hecho, separando ambos problemas: Posición y orientación.
- 🤖 Para ello, dada una posición y orientación final deseadas, establece las coordenadas del punto de corte de los 3 últimos ejes (muñeca del robot) calculándose los valores de las tres primeras variables articulares (q_1 , q_2 , q_3) que consiguen posicionar este punto.

Desacoplamiento Cinemático (cont.)

- 🤖 A partir de los datos de orientación y de los ya calculados (q_1, q_2, q_3) se obtiene los valores del resto de las variables articulares.

Es típico en robots de 6 GDL



Se puede resolver de forma explícita los 3GDL que definen la orientación de la garra.

Desacoplamiento Cinemático (cont.)

🤖 Para esta clase de manipuladores la cinemática inversa se puede resumir por el siguiente algoritmo:

🤖 **Paso 1:** Encontrar q_1, q_2, q_3 de tal manera que la muñeca de centro o_c tiene coordenadas dadas por

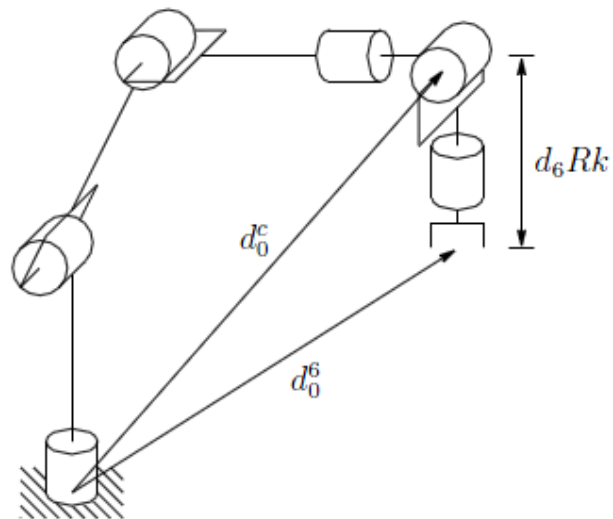
$$o_c^o = o - d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

🤖 **Paso 2:** Usando las variables determinadas en el paso 1, evaluar 0R_3 .

🤖 **Paso 3:** Buscar un conjunto de ángulos de Euler correspondientes a la matriz de rotación.

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1} R = (R_3^0)^T R.$$

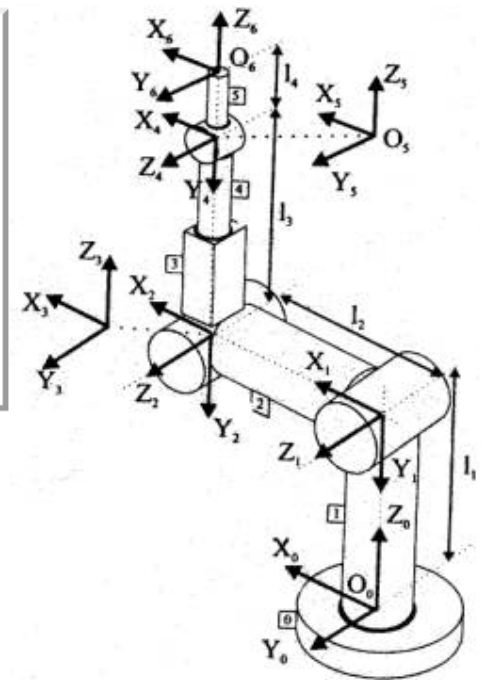
Desacoplamiento Cinemático (cont.)



Desacoplamiento Cinemático (cont.)

Parámetros DH del robot de la figura.

Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	I_1	0	-90°
2	θ_2	0	I_2	0
3	θ_3	0	0	90°
4	θ_4	I_3	0	-90°
5	θ_5	0	0	90°
6	θ_6	I_4	0	0



Desacoplamiento Cinemático (cont.)

- 🤖 Se utilizarán los vectores P_m y P_r , que van desde el origen del sistema asociado a la base del robot (S_0) hasta los puntos centro de la muñeca y fin del robot, respectivamente.
- 🤖 Es posible, mediante un método geométrico, calcular los valores de (q_1, q_2, q_3) que consiguen posicionar el robot en el P_m deseado.
- 🤖 Queda ahora obtener los valores de q_4, q_5, q_6 que consiguen la orientación deseada.

Desacoplamiento Cinemático (cont.)

- Para ello se denomina 0R_6 a la submatriz de rotación de 0T_6 se tendrá: ${}^0R_6 = (n\ o\ a) = {}^0R_3({}^3R_6)$
- Donde 0R_6 es conocida por la orientación deseada del extremo del robot, y 0R_3 definida por: ${}^0R_3 = {}^0A_1({}^1A_2)({}^2A_3)$, lo será a partir de los valores ya obtenidos de q_1 , q_2 y q_3 .
- Por lo tanto: ${}^3R_6 = (R_{ij}) = (1/{}^0R_3)({}^0R_6) = ({}^0R)(\exp)T(n\ o\ a)$ tendrá sus componentes numéricas conocidas.

Desacoplamiento Cinemático (cont.)

- Por otra parte, 3R_6 corresponde a una submatriz 3X3 de rotación de la matriz de transformación homogénea 3T_6 , que relaciona el sistema (S_3) con el (S_6), por lo tanto: ${}^3R_6 = {}^3A_4 ({}^4A_5)({}^5A_6)$.
- Donde ${}^{i-1}R_i$ es la submatriz de rotación de la matriz de DH ${}^{i-1}A_i$, cuyos valores son:

$$\begin{array}{ccc} {}^3R_4 & {}^4R_5 & {}^5R_6 \\ \left| \begin{array}{ccc} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

Desacoplamiento Cinemático (cont.)

🤖 Luego se tiene que:

$${}^3R_6 = \begin{vmatrix} C4C5C6-S4S6 & -C4C5S6-S4C6 & C4S5 \\ S4C5C6 + C4S6 & -S4C5S6 + C4C6 & -S4C5 \\ -S5C6 & S5S6 & C5 \end{vmatrix}$$

🤖 Donde R_{ij} será por valores numéricos conocidos:

$$R_{ij} = \begin{vmatrix} C4C5C6-S4S6 & -C4C5S6-S4C6 & C4S5 \\ S4C5C6 + C4S6 & -S4C5S6 + C4C6 & -S4C5 \\ -S5C6 & S5S6 & C5 \end{vmatrix}$$

Desacoplamiento Cinemático (cont.)

De esas nueve relaciones expresadas se toma las correspondientes a $1R3$, $2R3$, $3R3$, $3R1$, $3R2$.

$$R13 = C4S5$$

$$R23 = -S4C5$$

$$R33 = C5$$

$$R31 = -S5C6$$

$$R32 = S5S6$$

Del conjunto de ecuaciones es inmediato obtener los parámetros articulares:

$$q4 = \arcsen (R23 / R33)$$

$$q5 = \arccos (R33)$$

$$q6 = \arctg (-R32 / R31)$$



Desacoplamiento Cinemático (cont.)

- Estas expresiones y teniendo en cuenta que las posiciones de cero son distintas, constituyen la solución completa del problema cinemático inverso del robot articular.

Cinemática Directa vs. Cinemática Inversa

- **Cinemática directa**

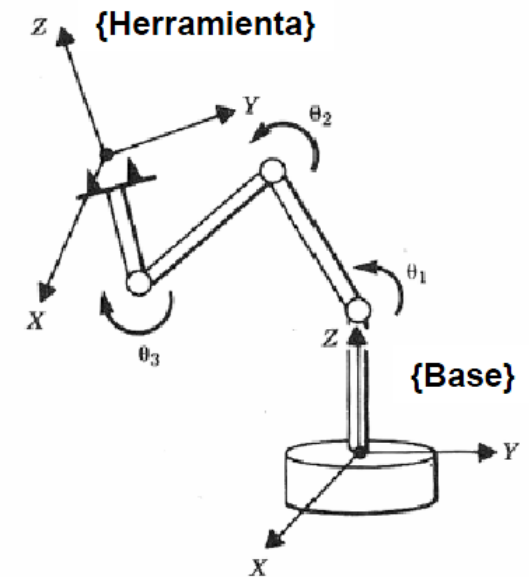
- **Conocidos:** Ángulos articulares y geometría de los eslabones
- **Determinar:** Posición y orientación del elemento terminal referido a la base

$$f(\theta) = {}^B_H T = {}^0_N T$$

- **Cinemática inversa**

- **Conocidos:** Posición y orientación del elemento terminal referido a la base
- **Determinar:** Ángulos articulares y geometría de los eslabones para alcanzar la orientación y posición de la herramienta

$$\theta = f^{-1}({}^B_H T) = f^{-1}({}^N_0 T)$$



Referencias Bibliográficas

-  Fu, K.S.; González, R.C. y Lee, C.S.G. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence. McGraw-Hill. 1987.
-  Cinemática. URL:
<http://proton.ucting.udg.mx/materias/robotica/r166/r78/r78.htm>.
-  Martínez A. G. M.; Jáquez O. S. A.; Rivera M. J. y Sandoval R. R. "Diseño propio y Construcción de un Brazo Robótico de 5 GDL". URL:
http://antiguo.itson.mx/rieeandc/vol4p1_archivos/Art2Junio08.pdf.
-  ROBO LAB. URL:
<http://www.aurova.ua.es/robolab/ejsSystem.htm>.





¡Gracias!



Dra. Kryscia Daviana Ramírez Benavides
Profesora e Investigadora
Universidad de Costa Rica
Escuela de Ciencias de la Computación e Informática

Sitio Web: <http://www.kramirez.net/>
E-Mail: kryscia.ramirez@ucr.ac.cr
kryscia.ramirez@ecci.ucr.ac.cr

Redes Sociales:

