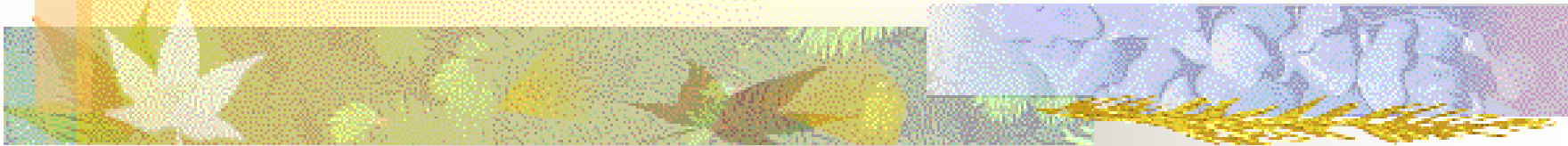


Dinámica del Robot



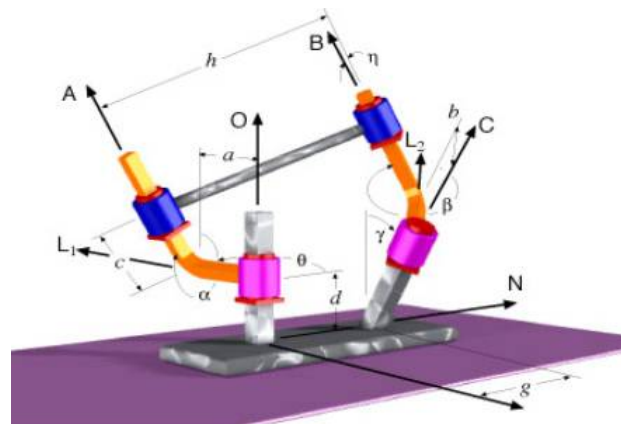
UCR – ECCI

CI-2657 Robótica

Prof. M.Sc. Kryscia Daviana Ramírez Benavides

Introducción

- La dinámica se ocupa de la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento en el que se origina.
- El modelo dinámico de un robot tiene por objeto conocer la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas implicadas en el mismo.





Introducción (cont.)

- Esta relación se obtiene mediante el denominado modelo dinámico, que relaciona matemáticamente:
 - La localización del robot definida por sus variables articulares o por las coordenadas de localización de su extremo, y sus derivadas: velocidad y aceleración.
 - Las fuerzas pares aplicadas en las articulaciones (o en el extremo del robot).
 - Los parámetros dimensionales del robot, como longitud, masa e inercias de sus elementos.



Introducción (cont.)

- La obtención de este modelo para mecanismos de uno o dos grados de libertad no es compleja, pero a medida que el número de grados de libertad aumenta, el planteamiento y obtención del modelo se complica enormemente.
- Por este motivo no siempre es posible obtener un modelo dinámico expresado de una forma cerrada.
- El modelo dinámico debe ser resuelto entonces de manera iterativa mediante la utilización de un procedimiento numérico.



Introducción (cont.)

- El problema de la obtención del modelo dinámico de un robot es uno de los aspectos más complejos de la robótica, lo que ha llevado a ser obviado en numerosas ocasiones.
- Sin embargo, el modelo dinámico es imprescindible para conseguir los siguientes fines:
 - Simulación del movimiento del robot.
 - Diseño y evaluación de la estructura mecánica del robot.
 - Dimensionamiento de los actuadores.
 - Diseño y evaluación del control dinámico del robot.



Introducción (cont.)

- El modelo dinámico completo de un robot debe incluir no solo la dinámica de sus elementos (barras o eslabones), sino la dinámica de sus sistemas de transmisión, de los actuadores y sus equipos electrónicos de mando.
- Estos elementos incorporan al modelo dinámico nuevas inercias, rozamientos, saturaciones de los circuitos electrónicos, etc. aumentando aun más su complejidad.



Modelo Dinámico de la Estructura de un Robot Rígido

- La obtención del modelo dinámico se basa fundamentalmente en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la segunda ley de Newton, o su equivalente para movimientos de rotación, la denominada ley de Euler:
 - $F = m dv$
 - $T = I dw + w (Iw)$
- Así, en el caso simple de un robot mono-articular como el representado en la figura, el equilibrio de fuerzas-pares daría como resultado la ecuación:
 - $t = I (d^2q/ dt^2) + MgL \cos q = ML^2 d^2q + MgL \cos q$



Modelo Dinámico de la Estructura de un Robot Rígido (cont.)

- En el planteamiento del equilibrio de fuerzas y pares que intervienen sobre el robot se obtienen los denominados modelos dinámicos:
 - **Modelo dinámico directo.** Expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares del robot en función de las fuerzas y pares que intervienen.
 - **Modelo dinámico inverso.** Expresa las fuerzas y pares que intervienen en función de la evolución de las coordenadas articulares y sus derivadas.



Modelado Mediante la Formulación de Lagrange-Euler

- Uicker en 1965, utilizó la representación de D-H basada en las matrices de transformación homogénea para formular el modelo dinámico de un robot mediante la ecuación de Lagrange.
- Este planteamiento utiliza, por tanto, las matrices $i-1A_i$ que relacionan el sistema de coordenadas de referencia del elemento i con el elemento $i-1$.
 - Se realizan en este caso operaciones de producto y suma innecesarias.
 - Se trata de un procedimiento ineficiente desde el punto de vista computacional.



Modelado Mediante la Formulación de Lagrange-Euler (cont.)

- El algoritmo es de orden de complejidad computacional $O(n^4)$.
- Sin embargo, conduce a unas ecuaciones finales bien estructuradas donde aparecen de manera clara los diversos pares y fuerzas que intervienen en el movimiento.
- Se presenta a continuación al algoritmo a seguir para obtener el modelo dinámico del robot por el procedimiento de Lagrange-Euler (L-E).

Modelado Mediante la Formulación de Lagrange-Euler – Algoritmo (cont.)

L-E 1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas de D-H.

L-E 2. Obtener las matrices de transformación ${}^0\mathbf{A}_i$ para cada elemento i .

L-E 3. Obtener las matrices \mathbf{U}_{ij} definidas por:

$$\mathbf{U}_{ij} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} \quad (\text{ver nota 1}) \quad [5.9]$$

L-E 4. Obtener las matrices \mathbf{U}_{ijk} definidas por :

$$\mathbf{U}_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_k} \quad (\text{ver nota 2}) \quad [5.10]$$

Modelado Mediante la Formulación de Lagrange-Euler – Algoritmo (cont.)

L-E 5. Obtener las matrices de pseudoinercias \mathbf{J}_i para cada elemento, que vienen definidas por:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int y_i x_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int z_i x_i dm & \int z_i y_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad [5. 11]$$

donde las integrales están extendidas al elemento i considerado, y (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas del diferencial de masa dm respecto al sistema de coordenadas del elemento.

L-E 6. Obtener la matriz de inercias $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ cuyos elementos vienen definidos por:

$$d_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{kj} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{ki}^T) \quad [5. 12]$$

con $i, j = 1, 2, \dots, n$
 n : número de grados de libertad

L-E 7. Obtener los términos h_{ikm} definidos por:

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \quad [5. 13]$$

con $i, k, m = 1, 2, \dots, n$

Modelado Mediante la Formulación de Lagrange-Euler – Algoritmo (cont.)

L-E 8. Obtener la matriz columna de fuerzas de Coriolis y centrípeta $\mathbf{H} = [h_i]^T$ cuyos elementos vienen definidos por:

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad [5.14]$$

L-E 9. Obtener la matriz columna de fuerzas de gravedad $\mathbf{C} = [c_i]^T$ cuyos elementos están definidos por:

$$c_i = \sum_{j=1}^n (-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{ji}^j \mathbf{r}_j) \quad [5.15]$$

con $i = 1, 2, \dots, n$

\mathbf{g} : es el vector de gravedad expresado en el sistema de la base $\{S_0\}$ y viene expresado por $(g_{x0}, g_{y0}, g_{z0}, 0)$

${}^i \mathbf{r}_j$: es el vector de coordenadas homogéneas del centro de masas del elemento j expresado en el sistema de referencia del elemento i .

L-E 10. La ecuación dinámica del sistema será:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} + \mathbf{C} \quad [5.16]$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de fuerzas y pares motores efectivos aplicados sobre cada coordenada q_i .

Modelado Mediante la Formulación de Lagrange-Euler – Algoritmo (cont.)

NOTAS

1. La derivada de la matriz de D-H ${}^0\mathbf{A}_i$ respecto de la coordenada q_j puede obtenerse fácilmente de manera computacional, mediante la expresión:

$$\frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1}\mathbf{A}_i & \text{si } j \leq i \\ [0] & \text{si } j > i \end{cases}$$

con:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si la articulación } i \text{ es de rotación}$$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si la articulación } i \text{ es de traslación}$$

2. Análogamente:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} \right) = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1}\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{Q}_k {}^{k-1}\mathbf{A}_i & \text{si } i \geq k \geq j \\ {}^0\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{Q}_k {}^{k-1}\mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1}\mathbf{A}_i & \text{si } i \geq j \geq k \\ [0] & \text{si } k > i \text{ o } j > i \end{cases}$$

3. Las matrices \mathbf{J}_i y \mathbf{D} son simétricas y semidefinidas positivas.



Modelado Mediante la Formulación de Lagrange-Euler – Algoritmo (cont.)

4. El término h_{ikm} representa el efecto, en cuanto a fuerza o par, generado sobre el eslabón i como consecuencia del movimiento relativo entre los eslabones k y m . Se cumple que $h_{ikm}=h_{imk}$ y que $h_{iii}=0$.
5. En la obtención de las matrices de pseudoinercia J_i , las integrales están extendidas al elemento i , de modo que ésta se evalúa para cada punto del elemento de masa dm y coordenadas (x_i, y_i, z_i) referidas al sistema de coordenadas del elemento.

Modelado Mediante la Formulación de Lagrange-Euler – Ejemplo (cont.)

Tabla 5.1. Parámetros D-H del robot polar del Ejemplo 5.1.

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	-90
2	0	d_2	0	0

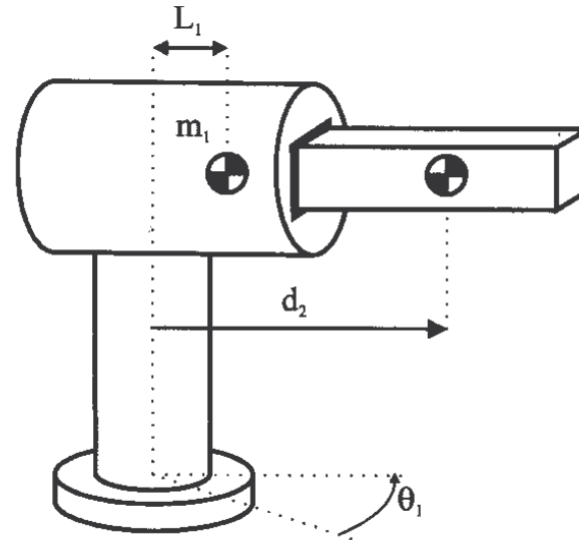


Figura 5.2. Robot polar de dos grados de libertad del Ejemplo 5.1.

Ejemplo 5.1.

Se va a aplicar el método de Lagrange-Euler para la obtención del modelo dinámico del robot de 2 grados de libertad (θ_1, d_2) con base fija de la Figura 5.2.

L-E 1. Se asignan los sistemas de referencia y parámetros de Denavit-Hartenberg según la Figura 5.3 y la Tabla 5.1.

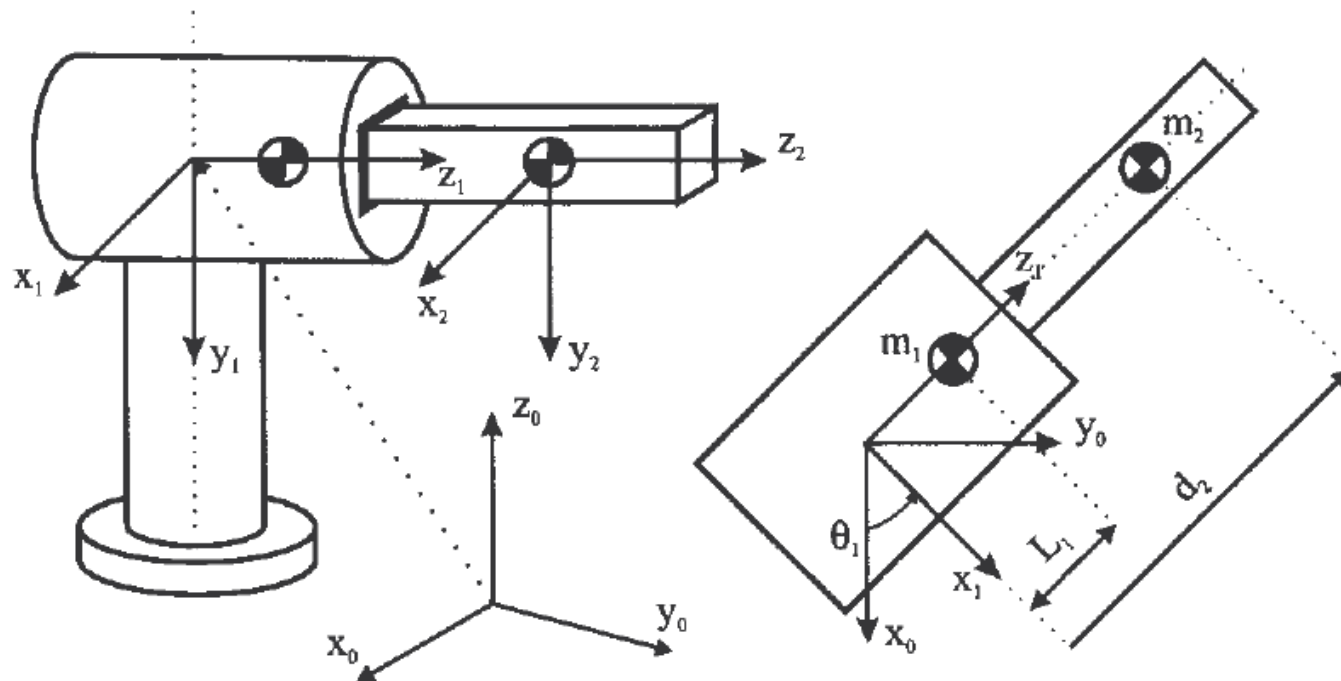


Figura 5.3. Sistemas de referencia del robot polar del Ejemplo 5.1.

L-E 2. Matrices de transformación ${}^0\mathbf{A}_i$

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{A}_2 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & -d_2 S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 & d_2 C_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L-E 3. Matrices \mathbf{U}_{ij}

$$\mathbf{U}_{11} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_{12} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$\mathbf{U}_{21} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_2}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -C_1 & -d_2 C_1 \\ C_1 & 0 & -S_1 & -d_2 S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_{22} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S_1 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L-E 4. Matrices U_{ijk}

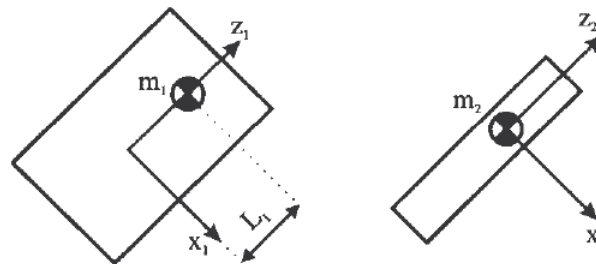
$$U_{111} = \frac{\partial U_{11}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ -S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{112} = \frac{\partial U_{11}}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{121} = \frac{\partial U_{12}}{\partial \theta_1} = [0] \quad U_{122} = \frac{\partial U_{12}}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{211} = \frac{\partial U_{21}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 & S_1 & d_2 S_1 \\ -S_1 & 0 & -C_1 & -d_2 C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{212} = \frac{\partial U_{21}}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{221} = \frac{\partial U_{22}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{222} = \frac{\partial U_{22}}{\partial d_2} = [0]$$

L-E 5. Matrices de pseudoinercia J_i



Elemento 1 Elemento 2
Figura 5.4. Elementos del robot polar del Ejemplo 5.1.

Elemento 1

$$\int_1 x_1^2 dm = 0 \quad \int_1 y_1 x_1 dm = \int_1 x_1 y_1 dm = 0 \quad \int_1 z_1 x_1 dm = \int_1 x_1 z_1 dm = 0$$

$$\int_1 y_1^2 dm = 0 \quad \int_1 y_1 z_1 dm = \int_1 z_1 y_1 dm = 0$$

$$\int_1 z_1^2 dm = m_1 L_1^2$$

$$\int_1 x_1 dm = 0 \quad \int_1 y_1 dm = 0 \quad \int_1 z_1 dm = L_1 m_1 \quad \int_1 dm = m_1$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2

Puesto que se considera la masa concentrada en el centro de masas y el origen del sistema de coordenadas del elemento 2 se toma en el mismo centro de masas, la matriz \mathbf{J}_2 toma la forma:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

L-E 6. Matriz de inercias $\mathbf{D} = [d_{ij}]$

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= \sum_{k=\max(1,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{k1} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{11} \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_{11}^T) + \text{Tr}(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) = \\
 &= \text{Tr} \begin{bmatrix} C_1^2 L_1^2 m_1 & S_1 C_1 L_1^2 m_1 & 0 & 0 \\ C_1 S_1 L_1^2 m_1 & S_1^2 L_1^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \text{Tr} \begin{bmatrix} C_1^2 d_2^2 m_2 & S_1 C_1 d_2^2 m_2 & 0 & 0 \\ S_1 C_1 d_2^2 m_2 & S_1^2 d_2^2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= (C_1^2 + S_1^2) m_1 L_1^2 + (C_1^2 + S_1^2) d_2^2 m_2 = m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{12} &= \sum_{k=\max(1,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{k2} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) = \\
 &= \text{Tr} \begin{bmatrix} S_1 C_1 d_2 m_2 & S_1^2 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ -C_1^2 d_2 m_2 & -S_1 C_1 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1 C_1 d_2 m_2 - S_1 C_1 d_2 m_2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{21} &= \sum_{k=\max(2,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{k1} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) = \\
 &= \text{Tr} \begin{bmatrix} S_1 C_1 d_2 m_2 & -C_1^2 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ S_1^2 d_2 m_2 & -S_1 C_1 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1 C_1 d_2 m_2 - S_1 C_1 d_2 m_2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{22} &= \sum_{k=\max(2,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{k2} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) = \\
 &= \text{Tr} \begin{bmatrix} S_1^2 m_2 & -S_1 C_1 m_2 & 0 & 0 \\ -S_1 C_1 m_2 & C_1^2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1^2 m_2 + C_1^2 m_2 = m_2
 \end{aligned}$$

luego:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

L-E 7. Términos en h_{ikm}

$$h_{111} = \sum_{j=\max(1,1,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j11} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{111} \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_{11}^T) + \text{Tr}(\mathbf{U}_{211} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) =$$

$$= \text{Tr} \begin{bmatrix} -C_1 S_1 m_1 L_1^2 & -S_1^2 m_1 L_1^2 & 0 & 0 \\ C_1^2 m_1 L_1^2 & C_1 S_1 m_1 L_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \text{Tr} \begin{bmatrix} -S_1 C d_2^2 m_2 & -S_1^2 d_2^2 m_2 & 0 & 0 \\ C_1^2 d_2^2 m_2 & S_1 C_1 d_2^2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -C_1 S_1 m_1 L_1^2 + C_1 S_1 m_1 L_1^2 - d_2^2 S_1 C_1 m_2 + d_2^2 S_1 C_1 m_2 = 0$$

$$h_{112} = \sum_{j=\max(1,1,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j12} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{212} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) =$$

$$= \text{Tr} \begin{bmatrix} C_1^2 d_2 m_2 & S_1 C_1 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ S_1 C_1 d_2 m_2 & S_1^2 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C_1^2 d_2 m_2 + S_1^2 d_2 m_2 = d_2 m_2$$

$$h_{121} = \sum_{j=\max(1,2,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j21} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{221} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T)$$

$$\text{como } \mathbf{U}_{221} = \mathbf{U}_{212} \Rightarrow h_{121} = h_{112} = d_2 m_2$$

$$h_{122} = \sum_{j=\max(1,2,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j22} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{222} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) = 0$$

$$h_{211} = \sum_{j=\max(2,1,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j11} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{211} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) =$$

$$= \text{Tr} \begin{bmatrix} -S_1^2 d_2 m_2 & S_1 C_1 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ S_1 C_1 d_2 m_2 & -C_1^2 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1^2 d_2 m_2 - C_1^2 d_2 m_2 = -d_2 m_2$$

$$h_{212} = \sum_{j=\max(2,1,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j12} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{212} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) =$$

$$= \text{Tr} \begin{bmatrix} S_1 C_1 m_2 & -C_1^2 m_2 & 0 & 0 \\ S_1^2 m_2 & -S_1 C_1 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1 C_1 m_2 - C_1 S_1 m_2 = 0$$

$$h_{221} = \sum_{j=\max(2,2,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j21} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{221} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T)$$

$$\text{como } \mathbf{U}_{221} = \mathbf{U}_{212} \Rightarrow h_{221} = h_{212} = 0$$

$$h_{222} = \sum_{j=\max(2,2,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j22} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{222} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) = 0$$

L-E 8. Matriz columna de fuerzas de Coriolis y centrífugas $\mathbf{H} = [h_i]^T$

$$h_1 = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{1km} \dot{q}_k \dot{q}_m = h_{111} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + h_{112} \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + h_{121} \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 + h_{122} \dot{d}_2 \dot{d}_2 =$$

$$= 0 \cdot \dot{\theta}_1^2 + (d_2 m_2 + d_2 m_2) \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + 0 \cdot \dot{d}_2^2 = 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2$$

$$h_2 = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{2km} \dot{q}_k \dot{q}_m = h_{211} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + h_{212} \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + h_{221} \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 + h_{222} \dot{d}_2 \dot{d}_2 =$$

$$= -d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 + (0 + 0) \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + 0 \cdot \dot{d}_2^2 = -d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2$$

luego

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

L-E 9. Matriz columna de fuerzas de gravedad $\mathbf{C} = [c_i]^T$

$$c_i = \sum_{j=1}^N (-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{ji} \cdot \mathbf{r}_j)$$

con :

\mathbf{g} vector de gravedad expresado en el sistema de la base del robot $\{S_0\}$.

$$\mathbf{g} = [0, 0, -g, 0]$$

${}^j \mathbf{r}_j$ vector de coordenadas homogéneas de posición del centro de masas del eslabón j expresado en el sistema $\{S_j\}$. (Figura 5.4.)

$${}^1 \mathbf{r}_1 = [0, 0, L_1, 1]^T$$

$${}^2 \mathbf{r}_2 = [0, 0, 0, 1]^T$$

luego:

$$c_1 = \sum_{j=1}^2 (-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{j1}^{-1} \mathbf{r}_j) = -m_1 \mathbf{g} \mathbf{U}_{11}^{-1} \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{21}^{-1} \mathbf{r}_2 =$$

$$= -m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \\ 1 \end{bmatrix} - m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -C_1 & -d_2 C_1 \\ C_1 & 0 & -S_1 & -d_2 S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$c_2 = \sum_{j=1}^2 (-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{j2}^{-1} \mathbf{r}_j) = -m_1 \mathbf{g} \mathbf{U}_{12}^{-1} \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{22}^{-1} \mathbf{r}_2 =$$

$$= -m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \\ 1 \end{bmatrix} - m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S_1 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{C} = [c_1]^\top = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L-E 10. La ecuación dinámica del robot será :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} + \mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= (m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ F_2 &= m_2 \ddot{d}_2 - d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad [5.17]$$

UCR-EC Dinámica del Robot Donde T_1 es el par motor efectivo (incluyendo rozamiento y otras perturbaciones) que actúa sobre la articulación 1 y F_2 es la fuerza motora efectiva que actúa sobre la articulación 2.

Modelado Mediante la Formulación de Newton-Euler

- La formulación de Newton-Euler parte del equilibrio de fuerzas y pares:

$$\sum \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} \quad \sum \mathbf{T} = \mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega})$$

- Un adecuado desarrollo de estas ecuaciones conduce a una formulación recursiva en la que se obtienen la posición, velocidad y aceleración del eslabón i referidos a la base del robot a partir de los correspondientes del eslabón $i-1$ y del movimiento relativo de la articulación i .
 - De este modo, partiendo del eslabón 1 se llega al eslabón n .



Modelado Mediante la Formulación de Newton-Euler (cont.)

- El algoritmo se basa en operaciones vectoriales (con productos escalares y vectoriales entre magnitudes vectoriales, y productos de matrices con vectores) siendo más eficiente en comparación con las operaciones matriciales asociadas a la formulación Lagrangiana.
- De hecho, el orden de complejidad computacional de la formulación recursiva de Newton-Euler es $O(n)$, lo que indica que depende directamente del número de grados de libertad.

Modelado Mediante la Formulación de Newton-Euler – Algoritmo (cont.)

N-E 1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo con las normas de D-H.

N-E 2. Obtener las matrices de rotación ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ y sus inversas ${}^i\mathbf{R}_{i-1} = ({}^{i-1}\mathbf{R}_i)^{-1} = ({}^{i-1}\mathbf{R}_i)^T$, siendo:

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i \end{bmatrix}$$

N-E 3. Establecer las condiciones iniciales.

Para el sistema de la base $\{S_0\}$:

${}^0\boldsymbol{\omega}_0$: velocidad angular = $[0,0,0]^T$

${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0$: aceleración angular = $[0,0,0]^T$

${}^0\mathbf{v}_0$: velocidad lineal = $[0,0,0]^T$

${}^0\dot{\mathbf{v}}_0$: aceleración lineal = $[g_x, g_y, g_z]^T$

${}^0\boldsymbol{\omega}_0$, ${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0$ y ${}^0\mathbf{v}_0$ son típicamente nulos salvo que la base del robot esté en movimiento.

Para el extremo del robot se conocerá la fuerza y el par ejercidos externamente ${}^{n+1}\mathbf{f}_{n+1}$ y ${}^{n+1}\mathbf{n}_{n+1}$

$$\mathbf{z}_0 = [0,0,1]^T$$

${}^i\mathbf{p}_i$ = Coordenadas del origen del sistema $\{S_i\}$ respecto a $\{S_{i-1}\} = [a_i, d_i, S_i, d_i, C_i]$

${}^i\mathbf{s}_i$ = Coordenadas del centro de masas del eslabon i respecto del sistema $\{S_i\}$

${}^i\mathbf{I}_i$ = Matriz de inercia del eslabon i respecto del su centro de masas expresado en $\{S_i\}$

Modelado Mediante la Formulación de Newton-Euler – Algoritmo (cont.)

Para $i = 1 \dots n$ realizar los pasos 4 a 7 :

N-E 4. Obtener la velocidad angular del sistema $\{S_i\}$.

$${}^i\omega_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1}({}^{i-1}\omega_{i-1} + \mathbf{z}_0 \dot{q}_i) & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\omega_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases} \quad [5. 20]$$

N-E 5. Obtener la aceleración angular del sistema $\{S_i\}$.

$${}^i\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1}({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_0 \ddot{q}_i) + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times \mathbf{z}_0 \dot{q}_i & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases} \quad [5. 21]$$

N-E 6. Obtener la aceleración lineal del sistema i :

$${}^i\dot{v}_i = \begin{cases} {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{p}_i) + {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\dot{v}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}(\mathbf{z}_0 \ddot{q}_i + {}^{i-1}\dot{v}_{i-1}) + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + 2{}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0 \dot{q}_i + \\ \quad + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{p}_i) & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases} \quad [5. 22]$$

N-E 7. Obtener la aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón i :

$${}^i\mathbf{a}_i = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{S}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{s}_i) + {}^i\dot{v}_i \quad [5. 23]$$

Modelado Mediante la Formulación de Newton-Euler – Algoritmo (cont.)

Para $i = n \dots 1$ realizar los pasos 8 a 10.

N-E 8. Obtener la fuerza ejercida sobre el eslabón i :

$${}^i \mathbf{f}_i = {}^i \mathbf{R}_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{f}_{i+1} + m_i {}^i \mathbf{a}_i \quad [5.24]$$

N-E 9. Obtener el par ejercido sobre el eslabón i :

$${}^i \mathbf{n}_i = {}^i \mathbf{R}_{i+1} \left[{}^{i+1} \mathbf{n}_i + ({}^{i+1} \mathbf{R}_i {}^i \mathbf{p}_i) \times {}^{i+1} \mathbf{f}_{i+1} \right] + ({}^i \mathbf{p}_i + {}^i \mathbf{s}_i) \times m_i {}^i \mathbf{a}_i + {}^i \mathbf{I}_i {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i \boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i \mathbf{I}_i {}^i \boldsymbol{\omega}_i) \quad [5.25]$$

N-E 10. Obtener la fuerza o par aplicado a la articulación i

$$\boldsymbol{\tau}_i = \begin{cases} {}^i \mathbf{n}_i^T {}^i \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i \mathbf{f}_i^T {}^i \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases} \quad [5.26]$$

Donde τ es el par o fuerza efectivo (par motor menos pares de rozamiento o perturbación).

Modelado Mediante la Formulación de Newton-Euler – Ejemplo (cont.)

Tabla 5.2. Parámetros D-H del robot polar del Ejemplo 5.2.

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	-90
2	0	d_2	0	0

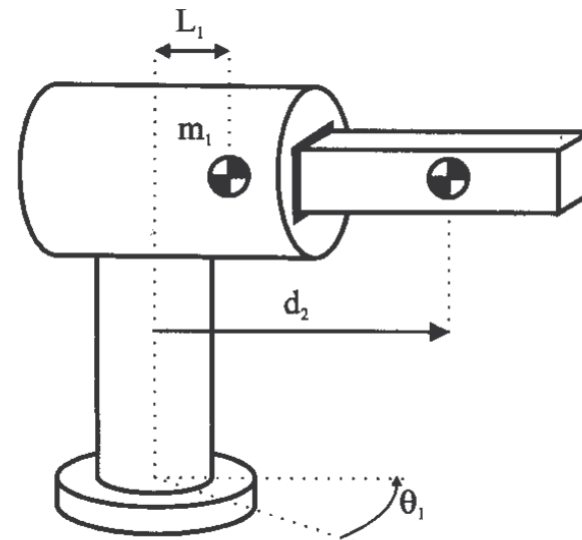


Figura 5.2. Robot polar de dos grados de libertad del Ejemplo 5.1.

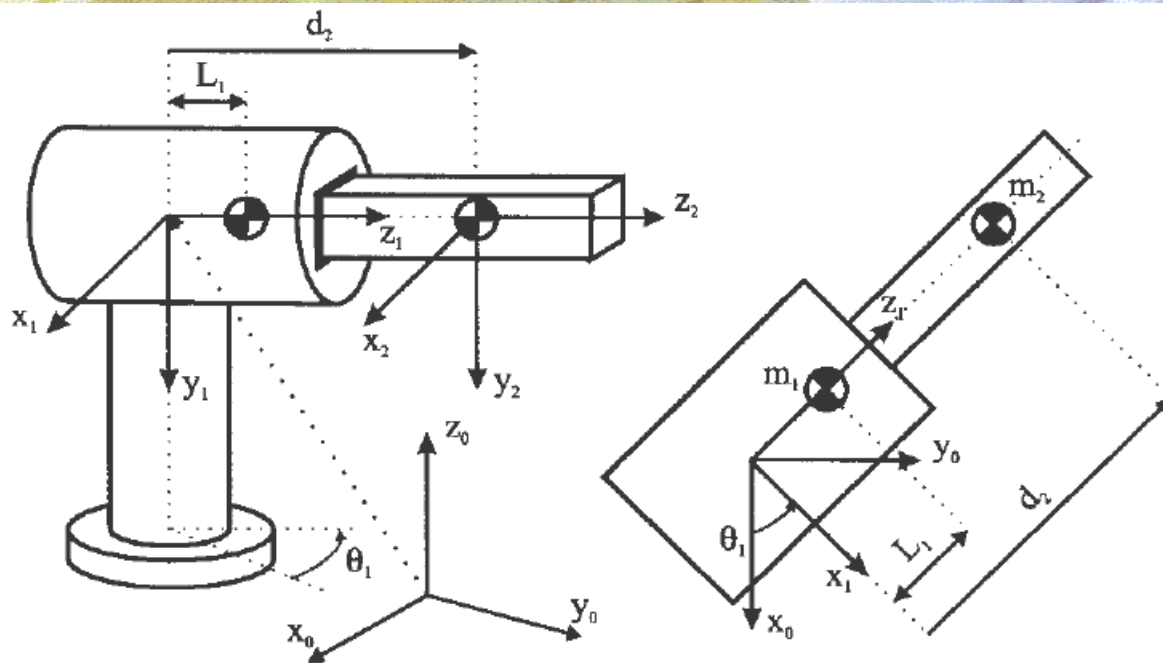


Figura 5.6. Configuración y ejes de referencia del robot polar del Ejemplo 5.2.

N-E 1. La asignación de los sistemas de referencia según D-H es la mostrada en la Figura 5.6. Los correspondientes parámetros de D-H se muestran en la Tabla 5.2.

N-E 2. Las matrices de rotación ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ y sus inversas son:

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{R}_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} &
 {}^1\mathbf{R}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &
 {}^0\mathbf{R}_2 &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 {}^1\mathbf{R}_0 &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} &
 {}^2\mathbf{R}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &
 {}^2\mathbf{R}_0 &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

N-E 3.

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 &= [0,0,0]^T & {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 &= [0,0,0]^T \\ {}^0\mathbf{v}_0 &= [0,0,0]^T & {}^0\dot{\mathbf{v}}_0 &= [0,0,g]^T \end{aligned}$$

y como no se ejercen fuerzas externas en el extremo del robot: ${}^3\mathbf{f}_3 = {}^3\mathbf{n}_3 = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0 &= [0,0,1]^T \\ {}^1\mathbf{p}_1 &= [0,0,0]^T & {}^2\mathbf{p}_2 &= [0,0,d_2]^T \\ {}^1\mathbf{S}_1 &= [0,0,L_1] & {}^2\mathbf{S}_2 &= [0,0,0] \end{aligned}$$

y por estar toda la masa de los elementos 1 y 2 concentrada en sus respectivos centros de gravedad:

$${}^1\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N-E 4.

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = {}^1\mathbf{R}_0 ({}^0\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{z}_0 \dot{\theta}_1) = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = {}^2\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

N-E 5.

$$\begin{aligned}
 {}^1\dot{\omega}_1 &= {}^1\mathbf{R}_0({}^0\dot{\omega}_0 + \mathbf{z}_0\ddot{\theta}_1) + {}^0\omega_0 \times \mathbf{z}_0\dot{\theta}_1 = \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^2\dot{\omega}_2 &= {}^2\mathbf{R}_1 {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

N-E 6.

$$\begin{aligned}
 {}^1\dot{v}_1 &= {}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1\mathbf{p}_1 + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1\mathbf{p}_1) + {}^1\mathbf{R}_0 {}^0\dot{v}_0 = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^2\dot{v}_2 &= {}^2\mathbf{R}_1(\mathbf{z}_0\ddot{d}_2 + {}^1\dot{v}_1) + {}^2\dot{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{p}_2 + 2{}^2\omega_2 \times ({}^2\mathbf{R}_1\mathbf{z}_0\dot{d}_2) + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times {}^2\mathbf{p}_2) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

N-E 7.

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{a}_1 &= {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}^1\mathbf{s}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\mathbf{s}_1) + {}^1\dot{\mathbf{v}}_1 = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 \\ -g \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{a}_2 &= {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2 + {}^1\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) + {}^2\dot{\mathbf{v}}_2 = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

N-E 8.

$${}^2\mathbf{f}_2 = {}^2\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{f}_3 + m_2 {}^2\mathbf{a}_2 = {}^2\mathbf{R}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -gm_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{f}_1 = {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{f}_2 + m_1 {}^1\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -gm_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 l_1 \\ -g \\ -\dot{\theta}_1^2 l_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 - \ddot{\theta}_1 l_1 m_1 \\ -g(m_1 + m_2) \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 l_1 m_1 \end{bmatrix}$$

N-E 9.

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{n}_1 &= {}^2\mathbf{R}_3 \left[{}^3\mathbf{n}_3 + ({}^3\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p}_2) \times {}^3\mathbf{f}_3 \right] + ({}^2\mathbf{p}_2 + {}^2\mathbf{s}_2) \times m_2 {}^2\mathbf{a}_2 + {}^2\mathbf{I}_2 {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\mathbf{I}_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times m_2 \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{n}_1 &= {}^1\mathbf{R}_2 \left[{}^2\mathbf{n}_2 + ({}^2\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{p}_1) \times {}^2\mathbf{f}_2 \right] + ({}^1\mathbf{p}_1 + {}^1\mathbf{s}_1) \times m_1 {}^1\mathbf{a}_1 + {}^1\mathbf{I}_1 {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1\mathbf{I}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} \right) + \\
 &+ \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 m_1 \\ -g m_1 \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 m_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 m_1 g \\ -\ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d_2 m_2 + L_1 m_1) g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 - \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

N-E 10.

$$\mathbf{F}_2 = {}^2\mathbf{f}_2^T {}^2\mathbf{R}_1 \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -gm_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 = {}^1\mathbf{n}_1^T {}^1\mathbf{R}_0 \mathbf{z}_0 &= \begin{bmatrix} (d_2 m_2 + L_1 m_1)g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 - \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= (\ddot{\theta}_1 d_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 + \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones que componen el modelo dinámico son :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= (\ddot{\theta}_1 d_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 + \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ \mathbf{F}_2 &= m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad [5.27]$$

Ecuaciones que coinciden con las obtenidas [5.17] mediante el planteamiento de Lagrange-Euler.



Modelo Dinámico de los Actuadores

- El modelo dinámico de un robot se compone por una parte del modelo de su estructura mecánica, que relaciona su movimiento con las fuerzas y pares que lo originan, y por otra parte el modelo de su sistema de accionamiento, que relaciona las órdenes de mando generadas en la unidad de control con las fuerzas y pares utilizados para producir el movimiento.

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor eléctrico de corriente continua (cont.)

- Un accionamiento eléctrico de corriente continua consta de un motor de corriente continua alimentado por una etapa de potencia y controlado por un dispositivo analógico o digital.

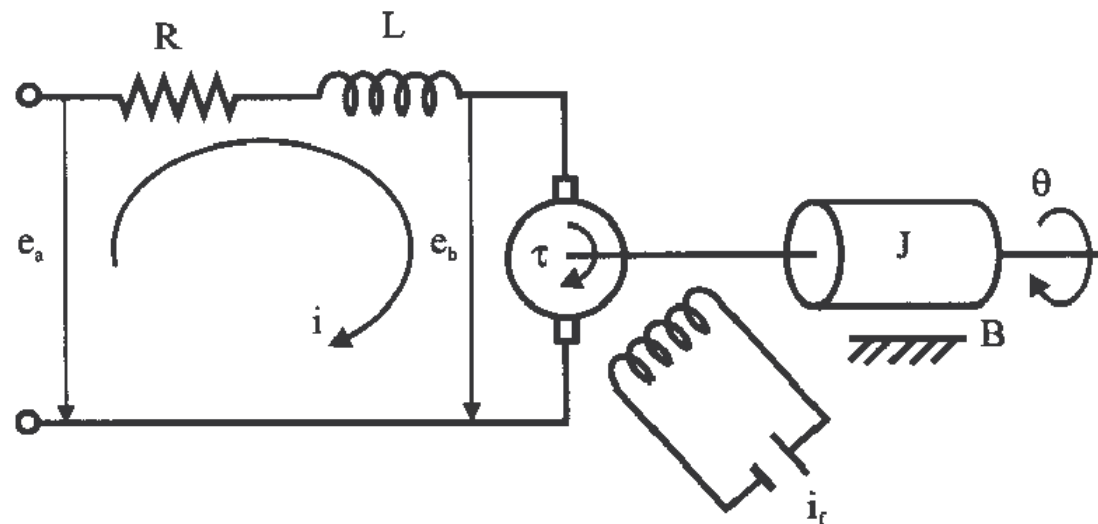


Figura 5.8. Esquema de funcionamiento de un motor de corriente continua controlado por inducido. 38

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor eléctrico de corriente continua (cont.)

- Cuando el rotor gira, se introduce en el una tensión e_b directamente proporcional a la velocidad angular y que se conoce como fuerza contraelectromotriz:

$$e_b = k_b \dot{\theta}$$

- La velocidad de giro se controla mediante la tensión e_a , salida del amplificador de potencia. La ecuación diferencial del circuito del motor es:

$$L_a \dot{i} + Ri + e_b = e_a$$

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor eléctrico de corriente continua (cont.)

- Por otra parte, el motor desarrolla un par proporcional al producto del flujo en el entrehierro ψ y la intensidad i , siendo el flujo en el entrehierro:

$$\psi = k_f i_f$$

- Donde i_f es la corriente de campo.
- De esta manera, la expresión del par desarrollado por el motor es el siguiente:

$$\tau = k_t i \psi$$

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor eléctrico de corriente continua (cont.)

- Para una corriente de campo i_f constante, el flujo se vuelve constante, y el par es directamente proporcional a la corriente que circula por el motor:

$$\tau = k_p i$$

- Este par se emplea para vencer la inercia y la fricción, además de posibles pares perturbadores:

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = \tau - \tau_p$$

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor eléctrico de corriente continua (cont.)

- Por lo tanto, las ecuaciones del motor de corriente continua controlado por inducción son:

$$e_b = k_b \dot{\theta}$$

$$(Ls + R)i + e_b = e_a$$

$$\tau = k_p i$$

$$\dot{\theta} = \frac{\tau - \tau_p}{Js + B}$$

- Donde todas las variables son en transformada de Laplace.

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor eléctrico de corriente continua (cont.)

- Para el control del motor se incluyen las etapas de potencia y control, utilizándose realimentación de intensidad y velocidad, ver figura 5.9.

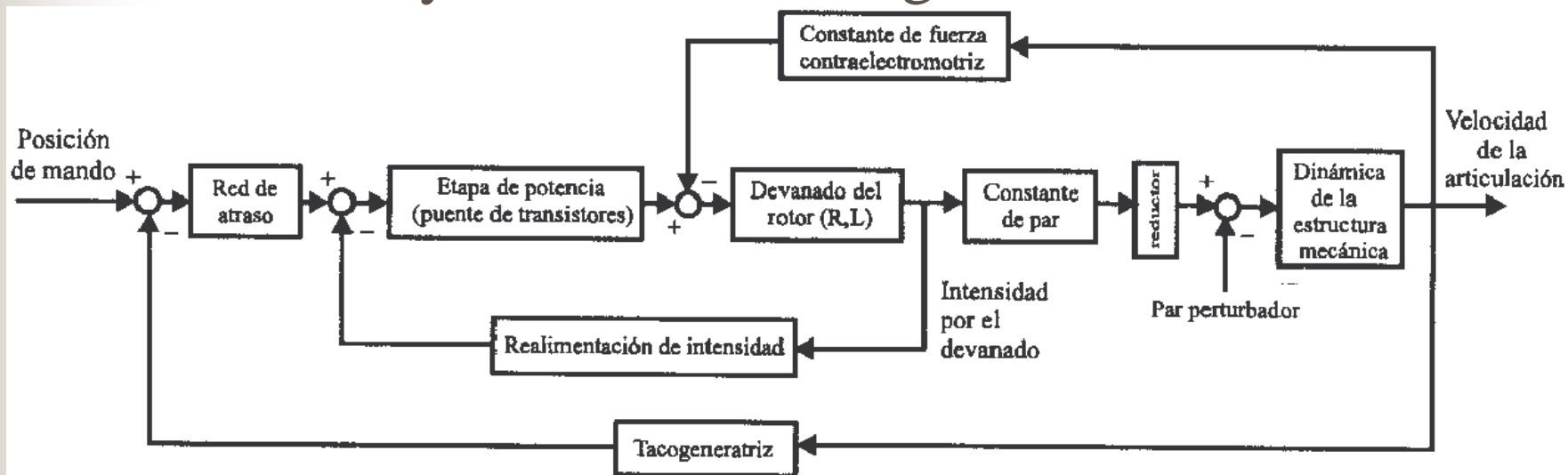


Figura 5.9. Esquema de bloques del modelo de motor eléctrico de corriente continua.

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor eléctrico de corriente continua (cont.)

- En la figura 5.10 se ha representado el diagrama de bloques correspondiente haciendo uso de funciones de transferencia, donde pueden realizarse ciertas simplificaciones:

$$G_1 = k \frac{s+a}{s+b} \approx k_1$$

$$G_2 = k_2$$

$$L \approx 0$$

J, B: Inercia y rozamiento viscoso equivalentes vistos a la salida del eje del rotor

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor eléctrico de corriente continua (cont.)

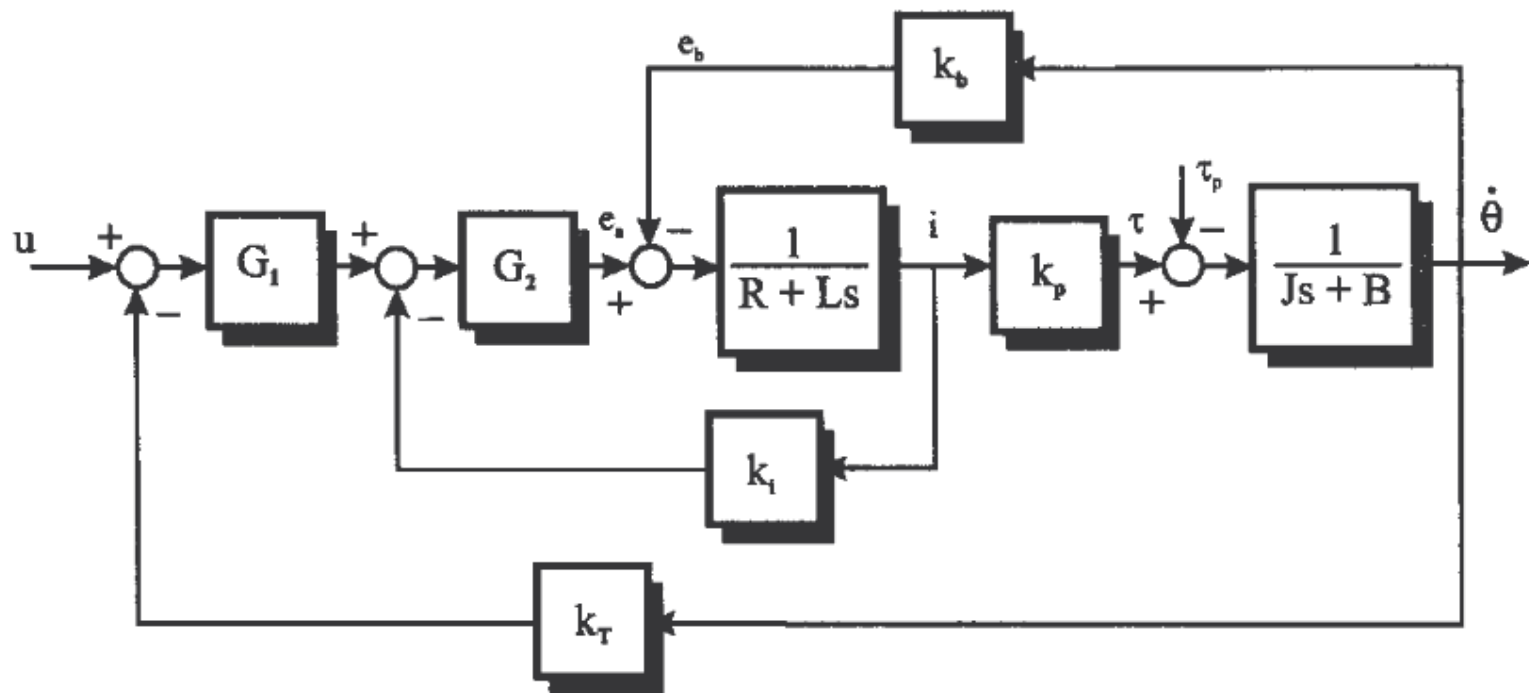


Figura 5.10. Diagrama de bloques del modelo de motor eléctrico de corriente continua.

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor eléctrico de corriente continua (cont.)

- Las simplificaciones del anterior diagrama permiten obtener:

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{u(s)} = \frac{k_p k_1 k_2}{(R + k_i k_2)(Js + B) + k_p(k_b + k_T k_1 k_2)} = \frac{k_m}{T_m s + 1}$$

$$\frac{T(s)}{u(s)} = \frac{k_p k_1 k_2 (Js + B)}{(R + k_i k_2)(Js + B) + k_p(k_b + k_T k_1 k_2)} = \hat{k}_m \frac{\hat{T}_m s + 1}{T_m s + 1}$$

donde se tiene que:

$$k_m = \frac{k_p k_1 k_2}{k_p(k_b + k_T k_1 k_2) + B(R + k_i k_2)}$$

$$\hat{k}_m = \frac{B k_p k_1 k_2}{k_p(k_b + k_T k_1 k_2) + B(R + k_i k_2)}$$

$$T_m = \frac{J(R + k_i k_2)}{k_p(k_b + k_T k_1 k_2) + B(R + k_i k_2)}$$

$$\hat{T}_m = \frac{J}{B}$$



Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor hidráulico con servo válvula (cont.)

- La introducción de sistemas electrónicos analógicos y digitales, para el control de las válvulas de distribución de caudal utilizadas en los accionamientos hidráulicos (lineales y rotativos), ha permitido la evolución de las válvulas proporcionales a las servo válvulas, consiguiendo que el comportamiento dinámico de los actuadores hidráulicos tenga la calidad adecuada para ser utilizada en servomecanismos, y en especial en la robótica.

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor hidráulico con servo válvula (cont.)

- En conjunto equipo electrónico, servo válvula y motor hidráulico puede ser modelado en una versión simplificada según las siguientes ecuaciones.
- Equilibrio de pares: $\tau = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + \tau_p$
- Par desarrollado por el motor: $\tau = k_p \Delta P$
- Continuidad de caudales: $Q_i = \dot{v}_i + Q_f + Q_c$
- Caudal de fuga: $Q_f = k_f \Delta P$
- Pérdida de caudal por compresión del fluido: $Q_c = k_c \Delta \dot{P}$

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor hidráulico con servo válvula (cont.)

- Electrónica de mando de la corredera de la servo válvula: $y = g(u)$
- Caudal suministrado por la servo válvula: $Q_1 = f(y) \cdot \sqrt{\Delta P}$

donde:

θ : ángulo girado por la paleta (y el eje) del rotor.

τ : par proporcionado por el motor.

τ_p : par externo perturbador.

J, B : inercia y constante de rozamiento viscoso (de motor y carga) asociados a la articulación.

ΔP : diferencia de presión entre las dos cámaras del motor.

Q_1 : caudal proporcionado por la servoválvula (entrada al motor).

Q_f : caudal que se fuga entre las dos cámaras del motor (leakage).

Q_c : caudal perdido por la compresibilidad del fluido (depende del índice de Bulk, del volumen y de la diferencia de presiones).

v_1 : volumen en la cámara de entrada al motor.

y : posición de la corredera de la servoválvula.

u : tensión de referencia a la electrónica de mando de la servoválvula.

k_p, k_f y k_c se considerarán constantes.



Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor hidráulico con servo válvula (cont.)

- El dispositivo electrónico de mando de la corredera de la válvula se diseña con el objetivo de que la relación entre señal de mando ‘ u ’ y posición de la corredera ‘ y ’ sea lo más parecida posible a una constante.
- Por este motivo la relación $y = g(u)$, se sustituye por:
$$y = k'_1 \cdot u$$

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor hidráulico con servo válvula (cont.)

- Por otra parte, la relación entre la posición de la corredera de la válvula, la diferencia de presiones y el caudal suministrado es en principio no lineal.
- Linealizando entorno a un punto de funcionamiento se obtiene: $Q_1 = k'_2 y - k_i \Delta P$
- Por lo tanto, la relación entre la señal de mando ' u ', el caudal Q_1 y al presión diferencial ΔP será:

$$Q_1 = k_1 u - k_i \Delta P$$

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor hidráulico con servo válvula (cont.)

- Por último, la velocidad de variación de volumen en la cámara del motor v_1 será proporcional a la velocidad de giro de la paleta, luego: $\dot{v}_1 = k_b \dot{\theta}$
- Con lo que las ecuaciones 3, 4 y 5, podrían agruparse como: $Q_1 = k_b \dot{\theta} + k_f \Delta P + k_c \Delta \dot{P}$
- Transformando por Laplace las ecuaciones, se obtiene el diagrama de bloques de la figura .

Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor hidráulico con servo válvula (cont.)

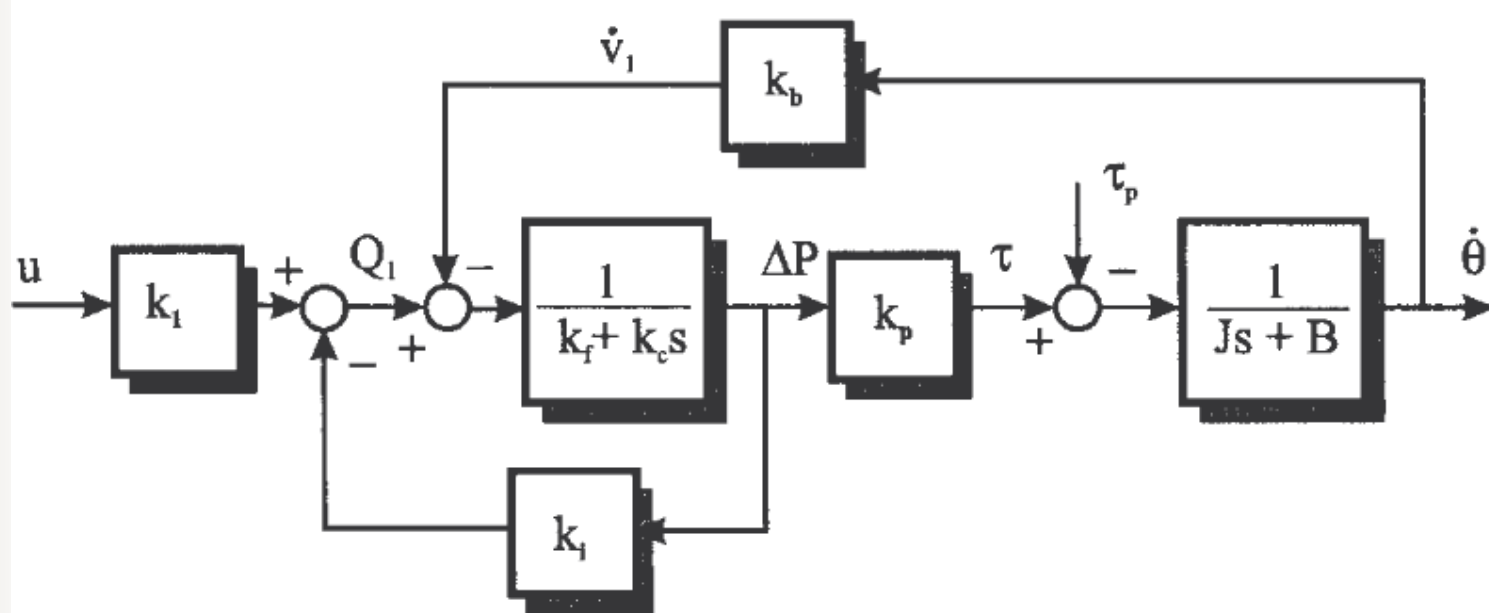


Figura 5.12. Diagrama de bloques del modelo de actuador hidráulico.



Modelo Dinámico de los Actuadores – Motor hidráulico con servo válvula (cont.)

- Como se observa presenta una absoluta analogía con el correspondiente a un accionamiento eléctrico salvo por la realimentación de velocidad de giro del actuador presente en aquel.
- Esta última puede ser incluida en la electrónica de mando, siendo entonces el modelado de ambos actuadores equivalente aunque con características dinámicas y posibilidades diferentes.



Referencias Bibliográficas

- La información fue tomada de:
 - Fu, K.S.; González, R.C. y Lee, C.S.G. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence. McGraw-Hill. 1987.