

Algoritmo para la Solución de la Cinemática Directa de Robots Paralelos Planares 3RRR Destinados a Aplicaciones en Tiempo Real.

Ing. MSc. Manuel Napoleón Cardona Gutiérrez.

Facultad de Ingeniería y C.C. N.N, Universidad de Sonsonate, Sonsonate, El Salvador C.A.
ingcardona@gmail.com

Resumen. En la Robótica, la cinemática estudia la relación entre la posición de los actuadores y la posición del efector final. El problema de la cinemática directa consiste en encontrar la posición del efector final conocidas las posiciones de los actuadores, mientras que para la cinemática inversa sucede lo contrario, conocida la posición de la plataforma móvil se debe encontrar la posición de los actuadores.

El análisis cinemático de los Robots seriales es mucho más fácil comparado con los Robots paralelos. La Solución a la cinemática en el caso de los Robots seriales se puede realizar con consideraciones geométricas elementales o algún método sistemático tal como el de Denavit y Hartenberg. En el caso de los Robots paralelos el análisis de la cinemática Inversa si se realiza con consideraciones geométricas, pero; la solución a la cinemática directa es bastante compleja y esto resulta ser uno de los principales problemas de los robots paralelos.

En el presente documento se realiza un análisis completo de la cinemática del mecanismo paralelo planar 3RRR. Se presenta una nueva metodología para abordar el problema de la cinemática directa basado en la formulación multicuerpo. Se plantea un algoritmo iterativo y se encuentra la solución a la cinemática directa utilizando un método numérico. Finalmente se presenta el diseño de un simulador utilizando MATLAB® como herramienta de programación y se analiza los tiempos de convergencia del método propuesto.

Términos Índice. Cinemática directa, cinemática inversa, cuaternios, índice de condición, Matriz Jacobiana, plataforma paralela, parámetros de Euler, singularidades.

I. INTRODUCCIÓN

ES bien conocido que los mecanismos paralelos, debido a su configuración, presentan muchas ventajas respecto a los mecanismos seriales, ya que debido a su configuración proporcionan mayores capacidades de carga, elevada velocidad de trabajo y alta precisión de posicionamiento. Sin embargo, presentan algunas inconvenientes, como el reducido espacio de trabajo y la compleja tarea de determinar su cinemática directa. Aunque han habido muchos estudios pioneros sobre los modelos cinemáticos [1], [2], [3], [4], fueron Fichter y Merlet [5], [6] los primeros que realizaron estudios rigurosos de la cinemática de los robots paralelos.

Algunos autores [7], [8], [9], [10] han dado soluciones de tipo analítico al problema de la cinemática directa, haciendo uso de la formulación de Denavit-Hartenberg o

consideraciones de tipo geométrico, pero solo para algunas configuraciones estructurales sencillas.

Otra metodología para la resolución del problema de la cinemática directa consiste en análisis puramente geométricos [11], los cuales resultan en polinomios de elevado grado con múltiples soluciones, haciendo que la obtención de una única solución sea difícil debido a la compleja manipulación de ecuaciones matemáticas que hay que realizar. Así por ejemplo en el caso de robots 6-UPS de seis grados de libertad, Merlet [12] ha encontrado hasta 40 soluciones diferentes de la posición y orientación de la base móvil para un mismo conjunto de estado de los actuadores.

Otro punto de vista a la solución de la cinemática directa consiste en la utilización de una arquitectura de sensores redundantes tal como lo proponen [13], [14], [15] y [16]. Estos sensores extras permiten determinar la configuración del robot. Sin embargo, aparecen otros problemas asociados con determinar el número adecuado de sensores y la influencia de los errores de medición en la determinación de la cinemática.

Una metodología más adecuada para dar solución a la cinemática directa y a la multiplicidad de soluciones, consiste en modelar las restricciones de movimiento para todas las partes móviles, especialmente las articulaciones, llevando a cabo lo que se denomina una formulación multicuerpo [17]. La idea de la formulación multicuerpo es básicamente construir para cada articulación que vincula los cuerpos del robot, una serie de ecuaciones que definan las restricciones que tienen en su movimiento de forma que las variables articulares estén incluidas en estas ecuaciones.

Empleando esta metodología multicuerpo para resolver el problema de la cinemática directa de los mecanismos paralelos, en este trabajo se presenta un método numérico genérico basado en el método de aproximaciones sucesivas de Newton-Raphson para encontrar una solución única y rápida, a partir de la definición de una función de restricción de distancia.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. Primero se estudia la geometría del mecanismo y con ella la cinemática de posición inversa y directa, se detalla el método numérico utilizado para obtener la solución de la cinemática directa, basado en el método de aproximaciones sucesivas de Newton-Raphson. Posteriormente se presenta el diseño de un simulador y se evalúa la bondad del método propuesto analizando los tiempos de convergencia. Se utiliza MATLAB® como plataforma de desarrollo.

II. CINEMÁTICA DE POSICIÓN DE LA PLATAFORMA PARALELA PLANAR 3RRR

El mecanismo planar 3RRR consiste de una plataforma móvil y una base fija, conectadas por tres cadenas cinemáticas, cada cadena tiene tres juntas cinemáticas de revolución. La junta, de par inferior de revolución permite un grado de Libertad. Dos eslabones conectados con una junta de revolución forman una junta de pasador rotatoria con cierre de forma [18].

El efector final (plataforma) se conecta a los eslabones con una junta pasiva y los eslabones se conectan a la base con una junta activa. Esta configuración conforma la plataforma planar de tres grados de libertad (Figura 1).

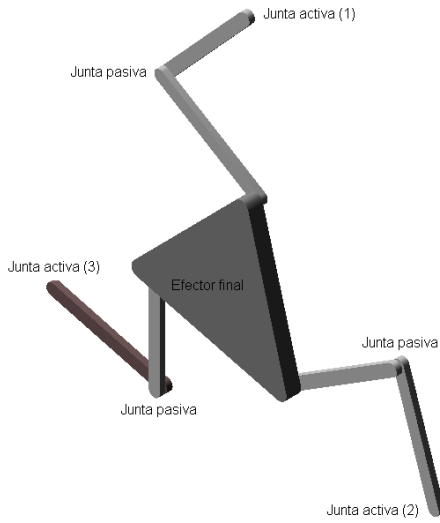


Figura 1. Plataforma paralela planar 3RRR

En el caso de los robots paralelos, la obtención de los modelos cinemáticos difieren mucho comparado con los robots seriales. En el caso de los robots seriales podemos aplicar el algoritmo de Denavit-Hartenberg [19] y obtener el modelo cinemático directo, de una forma sistemática e independiente de la configuración física. El modelo cinemático inverso resulta un poco más complicado determinarlo, ya que requiere utilizar ciertas consideraciones geométricas específicas, que dependen de cada configuración, o resolver ecuaciones por métodos numéricos, es decir, soluciones numéricas que a veces no son únicas.

En el caso de los mecanismo paralelos sucede lo contrario, el modelo cinemático inverso es fácilmente deducible con consideraciones geométricas de carácter general, mientras que la obtención del directo es más complejo y en numerosos casos no tiene una única solución analítica [20]. En el presente trabajo se plantea una solución a la cinemática directa en base a una función de restricción y se aplica un método numérico para obtener una solución única y rápida, la cual resulta adecuada para aplicaciones en tiempo real debido a la rapidez de convergencia del método.

A. Geometría del Mecanismo

La geometría del manipulador se puede determinar a partir de ciertas consideraciones trigonométricas, si consideramos la figura 2, el origen del marco de referencia está localizado en el punto P. El eje "x" está a lo largo de la dirección de \overline{PQ} y el eje "y" es perpendicular a \overline{PQ} . Se asume que la plataforma ABC y el triángulo formado por \overline{PQR} , son triángulos equiláteros (donde $AB=BC=AC=h$ y $PQ=QR=RP=c$).

La localización de la plataforma móvil, se puede especificar en términos de la posición del punto A, y la orientación dada por el ángulo ϕ [11]. Por lo tanto, las coordenadas del punto B y C se pueden determinar en términos de A y ϕ .

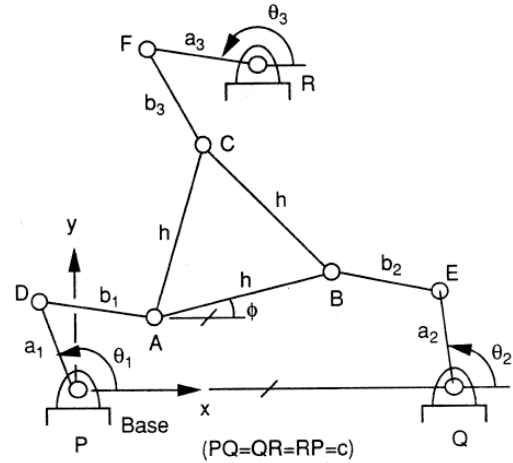


Figura 2. Manipulador paralelo planar con 3GDL, 3RRR [11]

Para la coordenada del punto B, tenemos que:

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + h \cos \phi \\ y_B &= y_A + h \sin \phi \end{aligned} \quad (1)$$

Mientras que para la coordenada del punto C, tenemos que:

$$\begin{aligned} x_C &= x_A + h \cos \left(\phi + \frac{\pi}{3} \right) \\ y_C &= y_A + h \sin \left(\phi + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Considerando la figura 3, donde se muestra la primera cadena cinemática, y además, se ha cambiado la posición de los eslabones para facilitar la geometría, podemos escribir la siguiente relación vectorial:

$$\overline{OA} = \overline{OD} + \overline{DA} \quad (3)$$

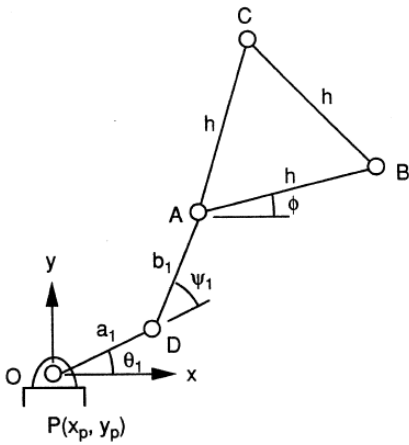


Figura 3. Ángulos asociados a un miembro típico de un MPP, 3RRR [11]

Si expresamos la relación anterior, según las coordenadas establecidas, tenemos que:

$$\begin{aligned} x_A &= a_1 \cos \theta_1 + b_1 \cos(\theta_1 + \psi_1) \\ y_A &= a_1 \operatorname{sen} \theta_1 + b_1 \operatorname{sen}(\theta_1 + \psi_1) \end{aligned} \quad (4)$$

Debido a que ψ_1 , es un ángulo de una junta pasiva, se puede eliminar de las dos ecuaciones anteriores, con lo cual:

$$\begin{aligned} x_A &= a_1 \cos \theta_1 + b_1 \cos(\theta_1) \\ y_A &= a_1 \operatorname{sen} \theta_1 + b_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \end{aligned} \quad (5)$$

Sumando los cuadrados de las dos ecuaciones anteriores y simplificando, resulta que:

$$x_A^2 + y_A^2 - 2x_A a_1 \cos \theta_1 - 2y_A a_1 \operatorname{sen} \theta_1 + a_1^2 - b_1^2 = 0 \quad (6)$$

En el caso de los otros dos miembros, podemos aplicar el proceso descrito anteriormente, con lo cual obtenemos:

Para el Miembro 2 (QEB):

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 - 2x_A x_Q - 2y_A y_Q + x_Q^2 + y_Q^2 + h^2 + a_2^2 - b_2^2 + 2x_A h \cos \phi + 2y_A h \operatorname{sen} \phi \\ - 2x_A a_2 \cos \theta_2 - 2y_A a_2 \operatorname{sen} \theta_2 - 2a_2 h \cos \phi \cos \theta_2 - 2x_Q h \cos \phi - 2y_Q h \operatorname{sen} \phi \\ + 2x_Q a_2 \cos \theta_2 + 2y_Q a_2 \operatorname{sen} \theta_2 - 2a_2 h \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Para el Miembro 3 (QEB):

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 - 2x_A x_R - 2y_A y_R + x_R^2 + y_R^2 + h^2 + a_3^2 - b_3^2 + 2x_A h \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right) \\ + 2y_A h \operatorname{sen} \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right) - 2x_A a_3 \cos \theta_3 - 2y_A a_3 \operatorname{sen} \theta_3 - 2a_3 h \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right) \cos \theta_3 \\ - 2x_R h \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right) - 2y_R h \operatorname{sen} \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right) + 2x_R a_3 \cos \theta_3 + 2y_R a_3 \operatorname{sen} \theta_3 \\ - 2a_3 h \operatorname{sen} \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \theta_3 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

B. Cinemática Inversa

La idea de la cinemática inversa consiste en encontrar los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, (Figura 2), coordenadas articulares, conocida la localización de la plataforma (x_A, y_A, θ) . Para ello se puede analizar cada cadena cinemática por separado. En el caso de la primera cadena cinemática, (6) puede ser escrita como:

$$e_1 \operatorname{sen} \theta_1 + e_2 \cos \theta_1 + e_3 = 0 \quad (9)$$

Si se considera que:

$$\begin{aligned} e_1 &= -2y_A a_1 \\ e_2 &= -2x_A a_1 \\ e_3 &= x_A^2 + y_A^2 + a_1^2 - b_1^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Sustituyendo en (9) las identidades:

$$\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{2t_1}{1+t_1^2} \quad y \quad \cos \theta_1 = \frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}, \quad \text{donde } t_1 = \tan \frac{\theta_1}{2} \quad (11)$$

Se tiene que:

$$(e_3 - e_2)t_1^2 + 2e_1 t_1 + (e_3 + e_2) = 0 \quad (12)$$

Finalmente, resolviendo (12) para t_1 , resulta que:

$$\theta_1 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2}}{e_3 - e_2} \right) \quad (13)$$

Como es de esperarse, a partir de (13) se obtienen dos soluciones para θ_1 , las cuales corresponden a las dos posibles configuraciones de la cadena cinemática (Figura 4).

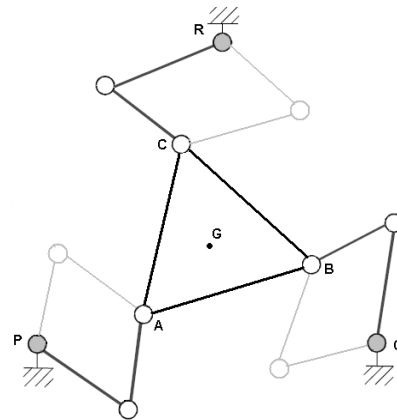


Figura 4. Configuraciones del mecanismo debido a los dos valores de θ .

Si a partir de (13) se obtiene una raíz doble, los eslabones a_1 y b_1 (Figura 3) estarán en una posición completamente extendida o doblada, llamada configuración singular. Cuando (13) no produce una raíz real, significa que la localización

especificada para la plataforma móvil no es alcanzable. Luego de haber encontrado θ_1 , el valor de ψ_1 se puede determinar a partir de (4).

Las configuraciones para las otras dos cadenas cinemáticas se pueden encontrar siguiendo el mismo procedimiento. El proceso detallado para las otras dos cadenas se describe en [21].

C. Cinemática Directa

El objetivo de la cinemática directa es encontrar la posición (x_A, y_A) y el ángulo de orientación ϕ de la plataforma móvil, conocidos los valores de las coordenadas articulares θ_1 , θ_2 y θ_3 . La forma convencional de abordar la cinemática directa consiste en análisis geométricos y en una enorme manipulación matemática de las ecuaciones involucradas, resultando en un polinomio de grado 8 correspondiente a 8 posibles soluciones.

El análisis propuesto en este trabajo consiste en un modelo multicuerpo de restricciones y en aplicar el método de Newton-Raphson para aproximar la respuesta, se trata de un método numérico iterativo el cual parte de la estimación inicial del vector de coordenadas generalizadas [21]. La idea de la formulación multicuerpo es básicamente la de construir para cada articulación que conecta los cuerpos del robot una serie de ecuaciones que definan las restricciones que tienen en su movimiento de forma que las variables articulares estén también incluidas en estas ecuaciones [20].

Para aplicar el método considérese la figura 5, y recuérdese que se dispone del valor del estado de los actuadores $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ y se desea encontrar la posición (x_g, y_g) y orientación (ϕ) de la plataforma móvil. Para comenzar se hace una estimación de la posición y orientación de la plataforma y se escribe en forma de coordenadas generalizadas, es decir:

$$q = [r \quad p]^T \quad (14)$$

En donde r es la posición estimada $(x, y, 0)$ y p es un cuaternio Hamiltoniano que describe la rotación estimada (e_0, e_1, e_2, e_3) , en el cual por tratarse de un movimiento en el plano y siendo el vector unitario de giro $u = 0i + 0j + k$ la ecuación del cuaternio p , se reduce a:

$$p = \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right), 0, 0, \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right) \quad (15)$$

El siguiente paso es definir la función objetivo o restricción de distancia, para un actuador del sistema tenemos que:

$$\Phi(r, p) = l(r, p, t) - l_0 = 0 \quad (16)$$

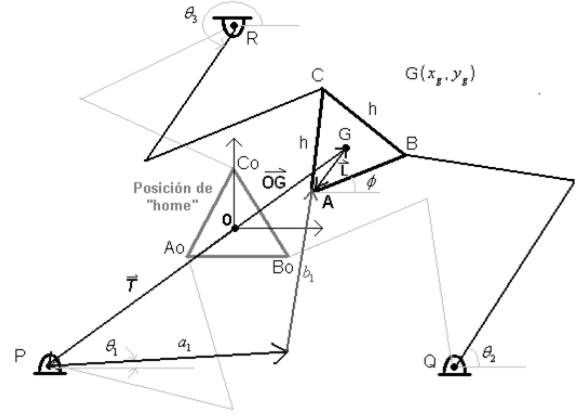


Figura. 5. Configuración seleccionada para el cálculo de la cinemática directa.

Donde:

r : Es el vector distancia del sistema de referencia de la plataforma móvil visto desde el origen 0, posición estimada.

p : Cuaternio que describe la orientación estimada del sistema de referencia de la plataforma móvil, respecto a la posición de "home" (parámetros de Euler).

$l(r, p, t)$: Longitud estimada del eslabón de acuerdo al lazo vectorial (b_i) .

l_0 : Longitud del eslabón (b_i) .

t : Ángulo deseado del actuador (θ_i) .

Para la primera cadena cinemática y a partir de la figura 5, podemos deducir que:

$$l(r, p, t) = |OG| + |L| - |T| - |a_1| \quad (17)$$

$$l_0 = |b_1|$$

Por lo que la función objetivo para la primera cadena cinemática queda como:

$$\Phi(r, p, t) = |OG| + |L| - |T| - |a_1| - |b_1| \quad (18)$$

El vector \overline{OG} representa la posición estimada de la plataforma (r) , \overline{L} se puede calcular multiplicando la matriz de rotación asociada al ángulo ϕ con la matriz de coordenadas de los puntos (A_0, B_0, C_0) referidos a la posición de "home", el vector \overline{T} es el vector que va desde el origen 0 al punto P y el vector $\overline{a_1}$ representa la posición deseada para el actuador, el cual está en función del ángulo dado para el actuador (θ_1) .

Con el análisis anterior se puede generalizar para las otras dos cadenas cinemáticas, por lo que la función objetivo para el sistema completo es:

$$F(r, p, t) = \begin{bmatrix} \Phi_1(r, p, t) \\ \Phi_2(r, p, t) \\ \Phi_3(r, p, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1(r, p, t) - l_{0,1} \\ l_2(r, p, t) - l_{0,2} \\ l_3(r, p, t) - l_{0,3} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Para aplicar el método numérico de Newton-Raphson realizamos una expansión en series de Taylor de la ecuación de restricción, por lo que despreciando los términos superiores y tomando los dos primeros términos de la serie tenemos que:

$$F(r, p, t) + F_q(r, p, t)\Delta q = 0 \quad (20)$$

En (20), $F_q(r, p, t)$ representa la derivada del vector de restricciones con respecto a las coordenadas generalizadas “ q ” y se conoce como el Jacobiano del vector de restricciones. En [22] se demuestra que utilizando las identidades de los parámetros de Euler, el Jacobiano del vector de restricciones se puede expresar como:

$$F_q = \begin{bmatrix} u_1^T & -2u_1^T R\tilde{a}_1 G \\ u_2^T & -2u_2^T R\tilde{a}_2 G \\ u_3^T & -2u_3^T R\tilde{a}_3 G \end{bmatrix} \quad (21)$$

Donde:

u_i : Vector unitario de la función de restricciones.

R : Matriz de rotación asociada al ángulo ϕ .

\tilde{a}_i : Matriz antisimétrica (skew) asociada a los puntos de la plataforma móvil (A_0, B_0, C_0) en la posición de “home”.

G : Matriz que vincula la rotación virtual de la plataforma móvil con la variación del cuaternio de rotación, se define como: $G = [-p, \tilde{p} + e_0 I]$, siendo p el cuaternio.

Según se define en [17], la matriz G en (21), se puede expresar a partir de los parámetros de Euler como:

$$G = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Una vez definida la matriz Jacobiana, podemos retomar (20) y escribirla como:

$$\Delta q = -F(r, p)F_q^\dagger(r, p) \quad (23)$$

Donde $F_q^\dagger(r, p)$, representa la matriz pseudoinversa. Luego se corrige iterativamente los valores del vector de coordenadas generalizadas a partir de:

$$q_i = q_{i-1} + \Delta q \quad (24)$$

El algoritmo continúa y se obtiene la solución a la cinemática directa cuando la norma del vector de restricciones es menor o igual a un valor de error (ϵ) establecido previamente, es decir, $\|F(r, p, t)\| \leq \epsilon$. La figura 6 muestra un diagrama de flujo del algoritmo propuesto.

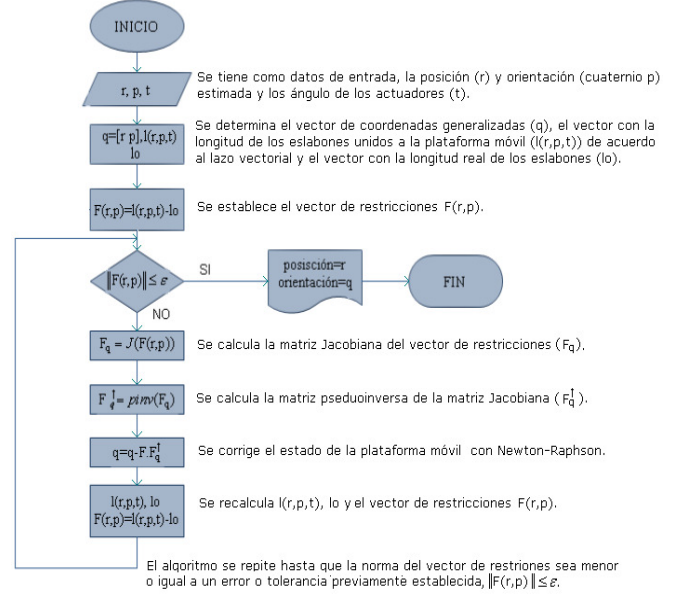


Figura. 6. Diagrama de flujo del algoritmo propuesto para el cálculo de la cinemática directa [21].

III. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO COMPUTACIONAL

Para las simulaciones y cálculos se utilizó MATLAB® 7.6.0 (R2008a). Se realizó un programa el cual permite simular el movimiento del robot dado el punto inicial y punto final. Este programa tiene como entrada la dimensión de los eslabones, dimensión de la plataforma base y móvil, coordenadas iniciales (posición y orientación), coordenadas finales (posición y orientación) y el número de pasos de la simulación. El programa muestra como resultado una ventana gráfica en la que se puede observar la evolución del movimiento del robot y el índice de condición para cada instante, si en un momento determinado se entra en un punto singular, el programa muestra un mensaje de advertencia y la ejecución se detiene. El programa está compuesto de 9 funciones, la estructura de las funciones se muestra en la figura 7. La figura 8 muestra una captura de pantalla del programa en ejecución. En la figura 9 se aprecia como el robot se acerca a una configuración singular.

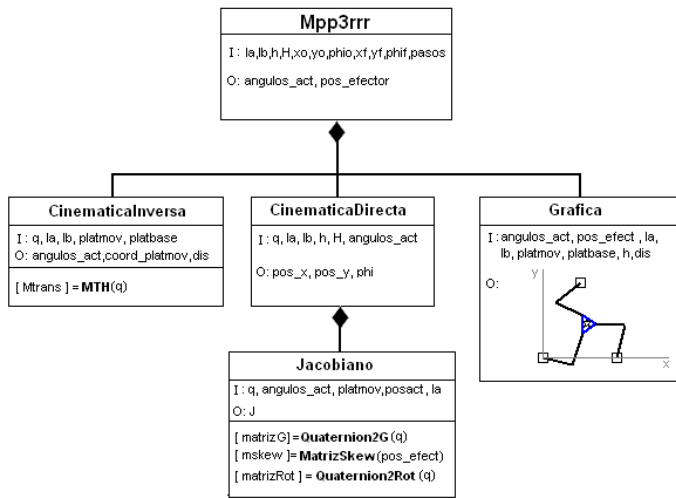


Figura 7. Diagrama de bloques de las funciones del simulador.

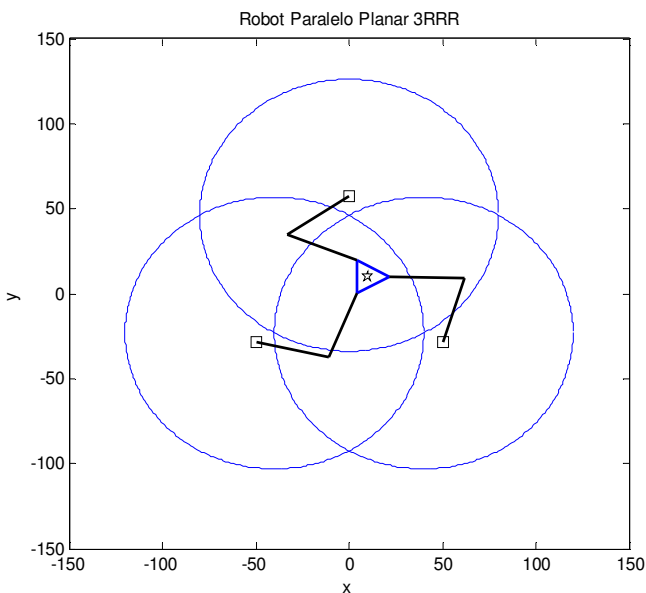


Figura 8. Vista de ejecución del simulador del MPP 3RRR.

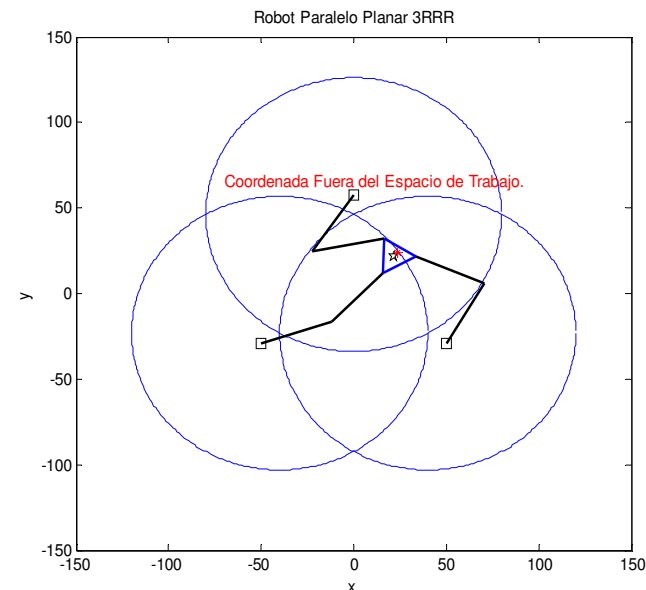


Figura 9. Vista de ejecución del simulador del MPP 3RRR. Coordenada fuera del espacio de trabajo.

IV. RESULTADOS: TIEMPO DE CONVERGENCIA DEL MÉTODO PROPUESTO

Se realizaron ciertas pruebas con MATLAB® para evaluar la bondad del método, se tomaron distintos valores de la estimación inicial y el método resultó ser robusto a errores en la estimación inicial, además, se encontró que el método converge rápido lo cual lo hace muy adecuado para el uso en sistemas embebidos de tiempo real.

Para realizar las pruebas se consideraron dos configuraciones del manipulador, las cuales se obtuvieron a partir de la cinemática inversa, se tomaron diferentes estimaciones iniciales variando la posición y orientación, y se midieron los tiempos de convergencia del método.

Para la primera prueba se consideró:

- Configuración real de la plataforma móvil:
 $x = 15, y = -8, \phi = -30^\circ$
- Ángulos de los actuadores:
 $\theta_1 = 337.1550^\circ, \theta_2 = 92.5431^\circ, \theta_3 = 248.4724^\circ$.

En el caso de la segunda prueba, la configuración considerada fue:

- Configuración real de la plataforma móvil:
 $x = -12, y = 12, \phi = 60^\circ$.
- Ángulos de los actuadores:
 $\theta_1 = 344.5205^\circ, \theta_2 = 108.9374^\circ, \theta_3 = 185.9311^\circ$.

Para ambas pruebas se varió la posición, la orientación y ambos valores, los resultados de ambas pruebas se muestran en las tablas 1 – 6 respectivamente, se utilizó el comando *tic-toc* de MATLAB® y se tomó la media de diez valores medidos.

Hay que tomar en cuenta que las pruebas se realizaron en un computador que no es mono tarea, por esta razón se tomaron diez valores para cada conjunto de datos (posición, orientación) y se tomó el promedio. Las características del computador donde se realizaron las pruebas son las siguientes:

- ✓ Marca: Apple
- ✓ Modelo: MacBook, A1181
- ✓ Sistema operativo: Mac OS X 10.5 Leopard
- ✓ Procesador: Intel Core 2 Duo T7300, a 2 Ghz
- ✓ Memoria RAM: 4 GB, bus de 667 Mhz.
- ✓ Disco duro: 320 GB.

Tabla 1. Estimaciones y resultados método de Newton-Raphson, variando solo la posición. (Prueba 1. Configuración real: $x=15, y=-8, \theta=-30^\circ$).

Estimación			Resultado			Error inicial	Tiempo (ms)
X	Y	θ	X	Y	θ		
12	-6	-30	15	-8	-30	3.606	8.626
20	-12	-30	15	-8	-30	6.403	10.351
6	0	-30	15	-8	-30	12.042	11.159
24	-18	-30	15	-8	-30	13.454	11.875
26	-20	-30	15	-8	-30	16.279	12.019
-4	4	-30	15	-8	-30	22.472	12.305
-10	-4	-30	15	-8	-30	25.318	14.368
16	16	-30	15	-8	-30	24.021	16.234
-10	12	-30	15	-8	-30	32.016	18.707
20	20	-30	15	-8	-30	28.443	23.590
24	20	-30	15	-8	-30	29.411	24.104
-15	12	-30	15	-8	-30	36.056	24.751
-14	14	-30	15	-8	-30	36.401	30.160
-15	14	-30	Diverge			N/A	
24	22	-30	15	-8	-30	31.321	35.265
24	23	-30	Diverge			N/A	
-15	-15	-30	15	-8	-30	30.806	43.305
-15	-16	-30	15	-8	-30	31.048	52.187
-16	-16	-30	Diverge			N/A	
32	-26	-30	15	-8	-30	24.759	68.880
33	-26	-30	Diverge			N/A	

Tabla 2. Estimaciones y resultados método de Newton-Raphson, variando solo la orientación. (Prueba 1. Configuración real: $x=15, y=-8, \theta=-30^\circ$).

Estimación			Resultado			Error inicial	Tiempo (ms)
X	Y	θ	X	Y	θ		
15	-8	-20	15	-8	-30	10.000	10.199
15	-8	-10	15	-8	-30	20.000	11.590
15	-8	0	15	-8	-30	30.000	13.709
15	-8	10	15	-8	-30	40.000	16.356
15	-8	20	15	-8	-30	50.000	22.305
15	-8	30	15	-8	-30	60.000	36.350
15	-8	37	15	-8	-30	67.000	82.294
15	-8	38	Diverge			N/A	
15	-8	-45	15	-8	-30	15.000	10.541
15	-8	-55	15	-8	-30	25.000	12.022
15	-8	-65	15	-8	-30	35.000	14.312
15	-8	-75	15	-8	-30	45.000	18.057
15	-8	-85	15	-8	-30	55.000	19.081
15	-8	-95	15	-8	-30	65.000	22.846
15	-8	-105	15	-8	-30	75.000	29.205
15	-8	-115	15	-8	-30	85.000	40.523
15	-8	-125	15	-8	-30	95.000	74.586
15	-8	-135	15	-8	-30	105.000	295.725
15	-8	-136	Diverge			N/A	

Tabla 3. Estimaciones y resultados método de Newton-Raphson, variando la posición y orientación. (Prueba 1. Configuración real: $x=15, y=-8, \theta=-30^\circ$).

Estimación			Resultado			Error inicial	Tiempo (ms)
X	Y	θ	X	Y	θ		
10	-4	-20	15	-8	-30	11.874	10.142
8	0	-5	15	-8	-30	27.166	12.905
10	10	10	15	-8	-30	44.147	22.290
10	10	40	15	-8	-30	72.450	76.113
14	14	40	15	-8	-30	73.383	654.697
14	15	40	Diverge			N/A	
12	13	40	15	-8	-30	73.144	77.320
12	14	40	Diverge			N/A	
0	0	-40	15	-8	-30	19.723	11.885
0	0	-80	15	-8	-30	52.811	29.341
10	10	-80	15	-8	-30	53.376	32.890
10	10	-127	15	-8	-30	98.783	94.315
10	10	-128	Diverge			N/A	
-10	10	120	15	-8	-30	153.131	20.304
-12	12	180	15	-8	-30	212.671	22.451
-12	12	207	15	-8	-30	239.370	72.755
-12	12	208	Diverge			N/A	

Tabla 4. Estimaciones y resultados método de Newton-Raphson, variando solo la posición. (Prueba 2. Configuración real: $x=-12, y=12, \theta=60^\circ$).

Estimación			Resultado			Error inicial	Tiempo (ms)
X	Y	θ	X	Y	θ		
-4	12	60	-12	12	60	8.000	5.734
0	12	60	-12	12	60	12.000	7.056
-8	12	60	-12	12	60	4.000	3.668
10	12	60	-12	12	60	22.000	7.917
2	4	60	-12	12	60	16.125	7.273
-10	-10	60	-12	-12	60	2.828	3.172
12	4	60	-12	12	60	25.298	7.995
14	14	60	-12	12	60	26.077	8.376
8	-12	60	-12	12	60	31.241	24.857
10	-10	60	-12	12	60	31.113	24.141
10	-15	60	-12	12	60	34.828	37.633
10	-16	60	Diverge			N/A	
18	18	60	-12	12	60	30.594	13.950
24	26	60	-12	12	60	38.626	1,616.000
25	26	60	Diverge			N/A	
12	-10	60	-12	12	60	32.558	29.986
-19	-19	60	-12	12	60	31.780	1,358.000
-19	-20	60	Diverge			N/A	

Tabla 5. Estimaciones y resultados método de Newton-Raphson, variando solo la orientación. (Prueba 2. Configuración real: $x=-12$, $y=12$, $\theta=60^\circ$).

Estimación			Resultado			Error inicial	Tiempo (ms)
X	Y	θ	X	Y	θ		
-12	12	50	-12	12	60	10.000	4.728
-12	12	43	-12	12	60	17.000	13.241
-12	12	40	-14.467	8.75	25.087	N/A	
-12	12	75	-12	12	60	15.000	5.024
-12	12	85	-12	12	60	25.000	5.518
-12	12	95	-12	12	60	35.000	6.202
-12	12	105	-12	12	60	45.000	6.519
-12	12	115	-12	12	60	55.000	7.170
-12	12	125	-12	12	60	65.000	7.498
-12	12	135	-12	12	60	75.000	8.023
-12	12	145	-12	12	60	85.000	8.836
-12	12	155	-12	12	60	95.000	9.420
-12	12	165	-12	12	60	105.000	12.926
-12	12	175	-12	12	60	115.000	14.238
-12	12	185	-12	12	60	125.000	16.704
-12	12	195	-12	12	60	135.000	23.571
-12	12	205	-12	12	60	145.000	42.210
-12	12	207	-12	12	60	147.000	49.923
-12	12	208	Diverge			N/A	

Tabla 6. Estimaciones y resultados método de Newton-Raphson, variando la posición y orientación. (Prueba 2. Configuración real: $x=-12$, $y=12$, $\theta=60^\circ$).

Estimación			Resultado			Error inicial	Tiempo (ms)
X	Y	θ	X	Y	θ		
-6	5	45	-12	12	60	17.607	8.720
0	0	45	-12	12	60	22.650	15.958
25	25	45	-12	12	60	41.988	499.371
25	26	45	Diverge			N/A	
-14	14	78	-12	12	60	18.221	5.225
-18	20	90	-12	12	60	31.623	6.127
-23	26	95	-12	12	60	39.268	7.321
-30	26	110	-12	12	60	54.955	7.899
17	-14	110	-12	12	60	63.380	14.821
21	-25	130	-12	12	60	85.779	675.040
22	-25	130	Diverge			N/A	
-14	-14	140	-12	12	60	84.143	8.431
-20	-25	150	-12	12	60	97.637	9.719
-20	-25	187	-12	12	60	132.522	25.516
-20	-25	187	Diverge			N/A	

A partir de los resultados podemos concluir que el método presentado es bastante robusto a errores en la estimación inicial y según se puede ver en los datos de las tablas 2 y 5, el método es menos vulnerable a errores en la estimación de la

orientación. Además, según los datos de las tablas 3 y , para una posición dada, es la orientación la que influye en que nos encontremos con un punto de divergencia en el espacio de trabajo del robot, esto se debe a que se está próximo a un punto singular.

En general, este método presentado para el cálculo de la cinemática directa, tiene muchas ventajas, obteniéndose una única solución, teniendo tiempos muy bajos de convergencia y siendo muy robusto a errores en la estimación.

V. PROTOTIPO A ESCALA

Además del simulador se diseñó un prototipo el cual recibe los datos en tiempo real desde el simulador en MATLAB® a través de comunicación serial, el prototipo se diseñó a escala y hace uso de servomotores como actuadores. Ver figura 10.

Se utilizó una tarjeta controladora con capacidad para 32 servomotores y con una resolución de 1 microsegundo de la empresa Lynkmotion (Figura 11), mientras que los servomotores son digitales, de 5 kg/cm de la marca Hitec.

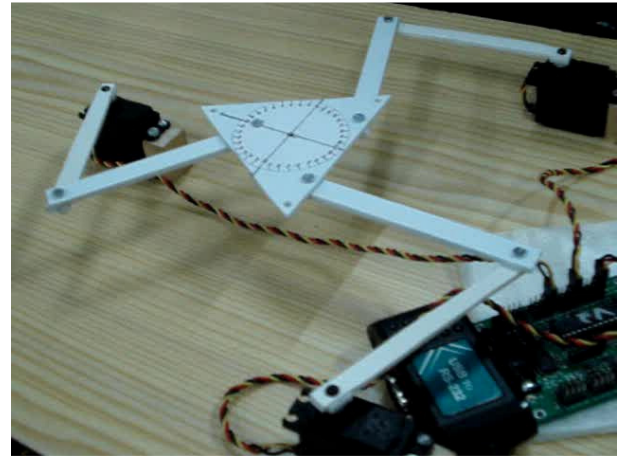


Figura 10. Prototipo del MPP 3RRR.



Figura 11. Tarjeta controladora de servos de 32 canales.

VI. REFERENCIAS

- [1] Rooney J. and C.F Earl *Manipulator postures and kinematics assembly configurations*. In: 6th World congress on theory of machines and mechanisms, New Delhi pp. 1014-1020.
- [2] Hunt, K. H (1983). *Structural kinematics of in-parallel actuated robot arms*. ASME Transaction. Journal of mechanisms, transmissions and automation in design 105, 705-712.
- [3] Mohamed M.G., and J. Duffy (1985). *A direct determination of the instantaneous kinematics of 3 dof planar and spherical double-triangular parallel manipulators*. ASME J. Mech. Trans. Autom. Des. 107, 226-229
- [4] Yang, D.C.H. and T.W. Lee (1984). *Feasibility study of a platform type of robotic manipulator from a kinematic viewpoint*. Journal of mechanisms, transmissions and automation in design 106, 191-198.
- [5] Fichter, E.F. (1986). *A stewart platform based manipulator: general theory and practical construction*. Int. Journal of Robotic Research 5(2), 157-181.
- [6] Merlet J.P. (1990). *An algorithm for the forward kinematics of general 6 dof parallel manipulators*. Research report 1331. INRIA.
- [7] Merlet J.P. (1992). *Direct kinematics and assembly modes of parallel manipulators*. International Journal of Robotics Research 11(2), 150-162.
- [8] Innocenti, C. and V. Parenti-Castelli (1993). *Closed form direct position analysis of a 5-5 parallel mechanism*. ASME Transaction, Journal of mechanical design 120, 73-99.
- [9] Angeles, J. and C.S. López-Cajún (1992). *The design of isotropic manipulator architectures in the presence of redundancies*. International Journal of Robotic Research 11, 196 -201.
- [10] Ait-Ahmed, M. and M. Renaud (1993). *Polynomial representation of the forward kinematics of a 6 dof parallel manipulator*. In: Proc. of Int. Symp. On Intelligent robotics. (Bangalore, Ed.). Vol. 1.
- [11] Lung-Wen Tsai (1999). *Robot Analysis, The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley and Sons, Inc.
- [12] Merlet J.P. (1997). *Les robots parallèles*. Hermes.
- [13] Inoue, H., Y. Tsusaka and T. Fukuizumi (1985). *Parallel manipulator*. In: Proceedings of 3rd ISRR. pp. 321-327.
- [14] Arai, T., K. Cleary et al. (1990). *Design, analysis and construction of a prototype parallel link manipulator*. In: Proc. of IEEE Int. Conf. on intelligent robot and systems (IROS) (IEEE, Ed). Vol. 1. pp. 205-212.
- [15] Merlet J.P. (1999). *Designing a Parallel manipulator for a Specific Workspace*. I. J, Robotics Res. Pp. 545-556.
- [16] Bonev, I.A. and J. Ryu (1999). *A simple new closed-form solution of the direct kinematics using three linear extra sensors*. In: IEEE/ASME Int. Conf. on advanced intelligent mechanisms. Atlanta 19-23 de Sept. (IEEE/ASME, Ed.). Vol. 1. pp. 526-530.
- [17] Haugh, E. J. (1989). *Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems*. Allyn and Bacon.
- [18] Norton, R. (1992). *Design of Machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines*. Third edition, pp 23-24, 61-62.
- [19] Barrientos, A., L.F. Peñin., C. Blaguer, R. Aracil (1997). *Fundamentos de Robótica*. Mc Graw-Hill. España.
- [20] Aracil, R., Saltarén, R., Sabater, J., Reinoso O. (2006). *Robots Paralelos: Maquinas con un pasado para una robótica del futuro*. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial. Vol. 3, Núm. 1, pp. 16 – 28.
- [21] Cardona, Manuel. N. (2008). *Modelado Matemático y Análisis Cinemático de Robots Paralelos Planares 3RRR*. Tesis Máster en Automática y Robótica. Universidad Politécnica de Madrid. ETSII-UPM. Madrid, España.
- [22] Yime, E. Saltaren, R. (2007). *Reporte interno*. Universidad Politécnica de Madrid, ETSII, DISAM. Grupo de Robots y Máquinas Inteligentes.